

1908.

LIBRARY  
MICHIGAN STATE NORMAL  
COLLEGE

N: 11.

# ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 27. HEFT 1.

DER GANZEN REIHE 332. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT FÜNF TAFELN.



LEIPZIG, 1908.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

DÖRRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den  
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in  
15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.*

*(Ausgegeben am 25. September 1908.)*

# Inhalt.

	Seite
1. R. Gans. Zur Theorie des Ferromagnetismus. 2. Mitteilung: Die reversible longitudinale Permeabilität . . . . .	1
2. F. Hack. Die Ausbreitung ebener elektromagnetischer Wellen längs eines geschichteten Leiters, besonders in den Fällen der drahtlosen Telegraphie . . . . .	43
3. Léon Schames. Über die Abhängigkeit der Permeabilität des Eisens von der Frequenz bei Magnetisierung durch un- gedämpfte Schwingungen . . . . .	64
4. B. Walter. Versuche über die Solarisation photographischer Platten. (Hierzu Taf. I.) . . . . .	83
5. T. Retschinsky. Einfluß der Temperatur und des Aggregat- zustandes auf die Absorptionsspektren der geschmolzenen Salze. (Hierzu Taf. II—IV, Figg. 1—9.) . . . . .	100
6. H. Ruoss. Über eine neue Bestimmung der Pole von Stab- magneten . . . . .	113
7. Felix Jentzsch. Über die Elektronenemission glühender Metalloxyde . . . . .	129
8. Rudolf Ladenburg. Über den Einfluß der Reibung auf die Schwingungen einer mit Flüssigkeit gefüllten Kugel. (Hierzu Taf. V.) . . . . .	157
9. J. Reissig. Ultramikroskopische Beobachtungen . . . . .	186
10. Fr. Reinitzer. Zur Geschichte der flüssigen Kristalle . . . . .	213
11. N. Stschodro. Über Hertz'sche Spiegelversuche mit dem Duddelschen Bogen . . . . .	225
12. J. A. Vollgraff. Rotierendes Dielektrikum im magnetischen Felde . . . . .	229
13. A. Trowbridge. Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn. F. Paschen betreffs der Dispersion des Steinsalzes und Sylvin's im Ultrarot . . . . .	231
14. A. Einstein und J. Laub. Berichtigung zur Abhandlung: „Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper“ . . . . .	232

Die Redaktion der Annalen wird von den unseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



Seite

1

43

64

83

100

113

129

157

186

213

225

229

231

232

ren

den

asse

in

zu

beit

ies

sen

en-

nd-

ist

et.

den

nu-

den

au

tes

ren

ns,



ANNALEN  
DER  
PHYSIK.  
VIERTE FOLGE.  
BAND 27.

VERLAG VON  
J. NEUBAUER  
MÜNCHEN.

1880.

15 22 40 21. 2004 0608

04078

# ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 27.

DER GANZEN REIHE 382. BAND.

39.310  
KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT ELF FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1908.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

0000







# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 27.

### 1. Zur Theorie des Ferromagnetismus.

#### 2. Mitteilung:

#### *Die reversible longitudinale Permeabilität; von R. Gans.*

Inhalt: § 1. Einleitung. Definition der reversiblen Permeabilität. — § 2. Versuchsanordnung zur Aufnahme der Magnetisierungskurven. — § 3. Resultate: Magnetisierungskurven; Permeabilität. — § 4. Versuchsanordnung zur Messung der reversiblen Permeabilität; Resultate. — § 5. Theorie des permanenten Magnetismus. — § 6. Ponderomotorische Kräfte auf Ferromagnetika. — § 7. Energieumsetzungen in Ferromagnetica. — § 8. Die Duhem-Cisottische Theorie der Hysteresis.

#### § 1. Einleitung. Definition der reversiblen Permeabilität.

Da die irreversiblen Erscheinungen, die beim Magnetisierungsprozeß auftreten, und unter dem Namen Hysteresis bekannt sind, bis jetzt der Entwicklung einer Theorie des Magnetismus in ferromagnetischen Materialien hemmend in den Weg getreten sind, so wird es erwünscht sein, die Frage aufzuwerfen, ob es nicht auch reversible Vorgänge beim Magnetisieren gibt, und ob diese nicht von den irreversiblen zu trennen sind.

Wenn das glückt, würde sich ein genaueres Studium der hysteresisfreien Erscheinungen verlohnen, denn die Kenntnis dieser Phänomene wird auch Licht werfen auf das Wesen der Hysteresis, die für die Wissenschaft und für die Technik von hervorragendem Interesse ist.

Nun kann man in der Tat die Induktion in Eisen und Stahl vollkommen reversibel variieren, falls man sich nur auf kleine Änderungen beschränkt.<sup>1)</sup>

Zur Definition der Begriffe stellen wir folgende Betrachtungen an:

Wenn man ein unmagnetisches Stück eines Ferromagnetikums einer wachsenden Feldstärke  $\mathfrak{H}$  aussetzt, so wird in

1) Man vgl. auch Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 23. p. 225. 1887.

demselben eine Induktion  $\mathfrak{B}$  erzeugt, die durch den Punkt  $P$  der jungfräulichen Kurve mit der Abszisse  $OQ = \mathfrak{H}$  bestimmt ist (vgl. Fig. 1). Schreitet man im selben Sinne um das kleine

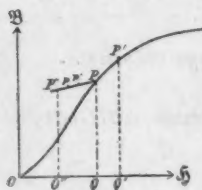


Fig. 1.

Stück  $\Delta \mathfrak{H} = QQ'$  vorwärts, so wächst die Induktion um  $\Delta \mathfrak{B}$ , und zwar ist  $\Delta \mathfrak{B} / \Delta \mathfrak{H}$  durch die Neigung der jungfräulichen Kurve im Punkte  $P$  gegeben; man gelangt zu einem Punkte  $P'$ , der durch die Koordinaten  $\mathfrak{H} + \Delta \mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{B} + \Delta \mathfrak{B}$  bestimmt ist, wo

$$(1) \quad \Delta \mathfrak{B} = \mu_d \Delta \mathfrak{H}$$

ist, und  $\mu_d$  die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der  $\mathfrak{B}, \mathfrak{H}$ -Kurve gegen die  $\mathfrak{H}$ -Achse bedeutet, eine Größe, welche in der Literatur als „differentielle Permeabilität“<sup>1)</sup> bekannt ist. (Aus diesem Grunde verwerfe ich den Ausdruck „differentielle Permeabilität“ meiner ersten Mitteilung<sup>2)</sup>, den ich für eine andere Größe gebraucht habe.) Sie ist, geradeso wie die gewöhnliche Permeabilität  $\mu = \mathfrak{B} / \mathfrak{H}$ , keine von der Magnetisierungskurve  $\mathfrak{H}, \mathfrak{B}$  unabhängige Größe, sondern durch diese gegeben.

Wenn man dagegen, nachdem man von  $O$  nach  $P$  gelangt ist, die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  um  $-\Delta \mathfrak{H} = QQ''$  verändert, so kommt man in der  $\mathfrak{B}, \mathfrak{H}$ -Ebene zu einem Punkte  $P''$  mit den Koordinaten  $\mathfrak{H} - \Delta \mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{B} - \Delta \mathfrak{B}$ , und zwar ist  $\Delta \mathfrak{B} / \Delta \mathfrak{H} = \mu_r$  eine Größe, die von dem Punkte  $P$  abhängt, in welchem die Änderung  $-\Delta \mathfrak{H}$  vorgenommen wird.  $\mu_r$  ist die Richtungstangente des absteigenden Hysteresisastes mit dem Scheitel  $P$  gerade im Scheitel.

Diese Größe  $\mu_r$  wollen wir die longitudinale reversible Permeabilität nennen. Longitudinal soll die so definierte Permeabilität heißen, weil das Zusatzfeld  $-\Delta \mathfrak{H}$  (bis auf den Richtungssinn) dieselbe Richtung wie  $\mathfrak{H}$  selbst hat; reversibel nennen wir die Größe, weil der Magnetisierungsvorgang, der von  $P$  nach  $P''$  geführt hat, tatsächlich umkehrbar ist, d. h. wenn man vom Punkte  $P$  nach  $P''$  gelangt ist dadurch, daß man  $\mathfrak{H}$  um  $\Delta \mathfrak{H}$  abnehmen ließ, und nun wieder die Feld-

1) Vgl. z. B. H. du Bois, *Magnetische Kreise*. Berlin u. München 1894. p. 251.

2) R. Gans, *Ann. d. Phys.* 22: p. 481. 1907.

stärke um  $Q''Q = +\Delta\mathfrak{H}$  wachsen läßt, so kommt man wieder zum Punkte  $P$  zurück. Dieser Prozeß kann beliebig häufig wiederholt werden, immer wird  $\Delta\mathfrak{B}/\Delta\mathfrak{H} = \mu_r$ , denselben Wert haben, man wird sich also immer zwischen den Punkten  $P$  und  $P''$  hin- und herbewegen. Wählt man ein  $\Delta\mathfrak{H}$  von anderer Größe, so wird auch die Größe von  $\Delta\mathfrak{B}$  im selben Verhältnis geändert sein, so daß wieder  $\Delta\mathfrak{B} = \mu_r \Delta\mathfrak{H}$  ist, und zwar braucht der eine Endpunkt der Feldänderung keineswegs in  $P$  zu liegen, sondern kann z. B. in  $p'$  (Fig. 1) sich befinden, so daß die Gleichung  $\Delta\mathfrak{B} = \mu_r \Delta\mathfrak{H}$  auch z. B. für Feldänderungen zwischen  $p$  und  $p'$  gilt.

Keht man in einem Punkte  $P$  der  $\mathfrak{B}\mathfrak{H}$ -Kurve die Richtung der bis dahin benutzten Feldänderung um, so berechnen sich von da ab die zu den erzeugten Feldern gehörigen Induktionen  $\mathfrak{B}$  nach der Formel

$$(2) \quad \mathfrak{B} = \mu_r \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M}_w,$$

wo  $\mu_r$  und  $\mathfrak{M}_w$  charakteristische Konstanten für den betrachteten Punkt  $P$  der  $\mathfrak{B}\mathfrak{H}$ -Kurve sind.

Allerdings sind für die Gültigkeit von (2) zwei Bedingungen zu beachten. Erstens ist es notwendig, daß das in (2) vorkommende  $\mathfrak{H}$  nicht über den  $\mathfrak{H}$ -Wert wächst, der die Abszisse von  $P$  ist, d. h. es ist notwendig, daß das  $\mathfrak{H}$  in (2)  $< OQ$  bleibt, und zweitens darf  $\mathfrak{H}$  auch nicht zu sehr abnehmen, d. h.  $Q''Q$  darf nicht zu groß sein, da die Linie  $PP''$  nur in einer nicht zu großen Erstreckung wirklich eine Gerade ist. Wie groß der Gültigkeitsbereich von (2) ist, läßt sich nicht allgemein angeben, da dieser von der Stelle  $P$  auf der Magnetisierungskurve, ferner vom Material und schließlich von der geforderten Genauigkeit abhängt, da die Linie  $PP''$  ein wenig gekrümmt ist, und zwar so, daß die konkave Seite von  $PP''$  der Magnetisierungskurve  $OP$  zugewendet ist.

Während also die obere Grenze ( $OQ$ ) von  $\mathfrak{H}$  für den Gültigkeitsbereich der Gleichung (2) exakt angebar ist, ist das für die untere Grenze nicht der Fall. Bei letzterer liegen die Verhältnisse ganz ähnlich wie bei der Permeabilität für kleine Feldstärken, der sogenannten Anfangspermeabilität, die der Formel<sup>1)</sup>

1) Vgl. Lord Rayleigh, Phil. Mag. 23. p. 225. 1887; L. Holborn, Wied. Ann. 61. p. 281. 1897; E. Gumlich, Tabellen von Landolt-Börnstein, Berlin 1905; H. E. J. G. Dubois, ibid.

$\mu_0 = a + b|\mathfrak{H}|$  genügt, so daß sich auch hier nicht sagen läßt, bis zu welchen Feldstärken die Anfangspermeabilität konstant ( $= a$ ) ist.

Wir nennen  $\mathfrak{M}_w$  die *wahre Magnetisierung*. In meiner ersten Mitteilung schrieb ich  $\mu$  anstatt  $\mu_r$  und nannte diese Größe nicht reversible, sondern differentielle Permeabilität; ferner nannte ich damals die wahre Magnetisierung  $\mathfrak{M}$ , während ich jetzt die Bezeichnung  $\mathfrak{M}_w$  vorziehe. Auch war der Faktor  $4\pi$  in (2) früher weggelassen worden. Ich bitte, diese Änderungen in Namen, Buchstaben und Einheiten entschuldigen zu wollen; maßgebend für dieselben ist der Wunsch, erstens mit den Benennungen und Einheiten der Technik übereinzustimmen, vor allem aber, die auf Grund der hier vorliegenden allgemeinen Untersuchungen gewonnenen Resultate auch äußerlich zu kennzeichnen.

In genau analoger Weise wie für einen Punkt  $P$  der jungfräulichen Kurve läßt sich die reversible Permeabilität

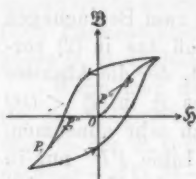


Fig. 2.

auch für einen beliebigen Punkt der Hysteresisschleife definieren, z. B. für  $P_1$  (vgl. Fig. 2), wo kleine reversible Änderungen von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$  durch die Gerade  $P_1P_1'$  gegeben sind. Auch hier gilt für die reversiblen Änderungen eine Gleichung analog (2); aber auch hier ist es wichtig, daß man bei diesen Änderungen niemals über den Punkt  $P_1$  hinauskommt, bis zu

dem man zunächst vorgeschritten ist, da sonst sofort auch irreversible Änderungen eintreten.

Gleichung (2) läßt sich nun auch auf irreversible Feldänderungen anwenden, wenn man  $\mathfrak{M}_w$  nicht mehr als konstant während der Variationen betrachtet.

Während also die wahre Magnetisierung  $\mathfrak{M}_w$  bei den reversiblen Feldänderungen konstant bleibt, verändert sie sich bei den irreversiblen auch mit.

Die Größe  $\mu_r$  ist nun für alle Punkte der aufsteigenden Kommutierungskurve sowie für die beiden Hysteresisäste an magnetisch harten und weichen Materialien definiert, und es zeigt sich durch die in § 4 wiedergegebenen Messungsergebnisse, daß der typische Verlauf bei allen Stoffen derselbe ist.



Da die sogenannte „Permeabilität eines permanenten Magneten“, so wie sie in der ersten Mitteilung gemessen worden ist, nichts anderes ist als die reversible Permeabilität der Stahlsorte, aus welcher er besteht, an einer ganz bestimmten Stelle der Hysteresisschleife, so sind die Resultate der ersten Mitteilung mit in dieser Untersuchung enthalten, so daß die frühere Arbeit gewissermaßen überflüssig geworden ist. Die jetzige Abhandlung hat sogar den Vorzug, infolge ihres allgemeineren Charakters den Gültigkeitsbereich der früher gefundenen Beziehungen genauer übersehen zu lassen. Diese mit der Theorie des permanenten Magnetismus zusammenhängenden Fragen sind in § 5 diskutiert worden.

Die Reversibilität der von uns studierten Vorgänge ermöglicht die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen auf ferromagnetische Körper im magnetischen Felde, und so lassen sich die ponderomotorischen Kräfte magnetischen Ursprungs auch bei diesen Materialien trotz der Hysteresiserscheinungen berechnen und z. B. die Formel für den Maxwell'schen Druck streng ableiten (§ 6).

Die Messung der reversiblen Permeabilität zeigt, daß  $\mu_r$  keinesfalls eine Funktion der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  ist, sondern wenn man  $\mu_r$  in seiner Abhängigkeit von  $\mathfrak{H}$  betrachtet, wesentlich von der Vorgeschichte abhängt.  $\mu_r$  ist zwar auf Grund der vorliegenden Messungen auch nicht exakt eine Funktion der Induktion  $\mathfrak{B}$  oder der Magnetisierung  $\mathfrak{M}$ , aber in der Abhängigkeit von diesen Größen ist die Vorgeschichte nur von nebensächlicherer Bedeutung. Sollte es sich herausstellen, daß dieser kleine Einfluß der Vorgeschichte auf sekundäre Erscheinungen zurückzuführen ist, so liegt eine Zerlegung der Energieumsetzungen bei ferromagnetischen Materialien in Änderungen der magnetischen Energie und in Hysteresiswärme sehr nahe, so daß man für beliebige Feldänderungen (nicht etwa nur für Kreisprozesse) die Hysteresiswärme berechnen könnte (§ 7). Allerdings ließe sich die hier in Betracht kommende Formel in Strenge nur durch Experimente beweisen.

In einem Schlußparagraphen (§ 8) ist die kürzlich veröffentlichte Theorie der Magnetisierungskurve von U. Cisotti<sup>1)</sup>

1) U. Cisotti, Rend. r. acc. dei Lincei (5) 17. p. 413. 1908.

diskutiert worden, da die vorliegenden Messungen das gesamte Material zur Prüfung der Cisottischen Hypothesen enthalten

Bevor wir zur Beschreibung der Versuchsanordnung übergehen, mögen noch einige Bezeichnungen und Beziehungen Platz finden, die im folgenden von Nutzen sein werden. Aus

$$(2) \quad \mathfrak{B} = \mu_r \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M}_w$$

folgt

$$(3) \quad \mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4\pi} = \frac{\mu_r - 1}{4\pi} \mathfrak{H} + \mathfrak{M}_w$$

oder, wenn man

$$(4) \quad \frac{\mu_r - 1}{4\pi} = \kappa_r$$

setzt,

$$(5) \quad \mathfrak{M} = \kappa_r \mathfrak{H} + \mathfrak{M}_w.$$

$\kappa_r$  möge die reversible longitudinale Suszeptibilität heißen. Die Magnetisierung  $\mathfrak{M}$  setzt sich also aus zwei Teilen additiv zusammen, aus der induzierten Magnetisierung  $\kappa_r \mathfrak{H}$  und der wahren Magnetisierung  $\mathfrak{M}_w$ .

Anstatt (2) können wir auch

$$(2') \quad \mathfrak{B} = \mu_r (\mathfrak{H} + \mathfrak{H}_i)$$

schreiben, und dann wäre für  $\mathfrak{H}_i$  die Bezeichnung *eingeprägte magnetische Feldstärke* am Platze.  $\mathfrak{H}_i$  steht dann eben mit  $\mathfrak{M}_w$  in der Beziehung

$$(6) \quad \mathfrak{H}_i = \frac{4\pi \mathfrak{M}_w}{\mu_r}.$$

Schließlich wäre auch anstatt (2') die Formel

$$(2'') \quad \mathfrak{M} = \kappa_r (\mathfrak{H} + \mathfrak{H}_i)$$

angebracht;  $\mathfrak{H}_i$  und  $\mathfrak{H}_i'$  stehen in einer einfach zu übersehenden Relation.

Wir erwähnen diese Größen, weil sie für das folgende (§ 7) von Interesse sind.

## § 2. Die Versuchsanordnung.

Zunächst wurden von den untersuchten Eisensorten als wichtigste Charakteristika die Magnetisierungskurven ( $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{H}$ -Kurven) aufgenommen, und zwar nach der magnetometrischen Methode mit Hilfe von verlängerten Rotationsellipsoiden resp. Zylindern. Die hierzu benutzte Versuchsanordnung ist im unteren Teile der Fig. 3, im Schaltungskreise I, schematisch dargestellt.

In üblicher Weise waren zwei gleiche Solenoide, die Magnetisierungsspule  $S_1$  und die Kompensationsspule  $S'$  ost-westlich (erste Hauptlage) vom Magnetometer  $M$  auf Schlitten befestigt und die Abstände so reguliert, daß bei jeder Stromstärke das Magnetometer stromlos war.

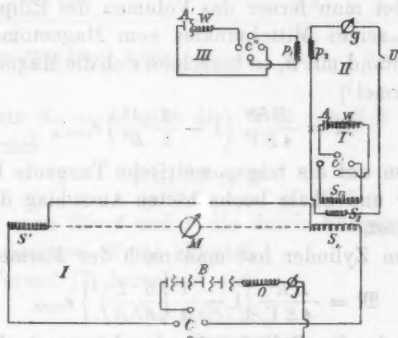


Fig. 3.

Das Feld in der Magnetisierungsspule, die aus vier Lagen isolierten Kupferdrahtes von 1 mm Durchmesser bestand, berechnet sich nach der Formel

$$\mathfrak{H}_0 \text{ (Gauss)} = \frac{4\pi n}{10} J \text{ (Amp.)},$$

wo

$$\frac{4\pi n}{10} = 41,22 \left( \frac{\text{Gauss}}{\text{Amp.}} \right)$$

beträgt.

Der Strom des Schaltungskreises I wurde einer Akkumulatorenbatterie  $B$  entnommen, er konnte durch den variablen Widerstand  $O$  reguliert, durch das Siemens & Halskesche Präzisionsmilliamperemeter  $J$  gemessen und durch den Stromwender  $C$  in seiner Richtung kommutiert werden.

Die Horizontalintensität  $H$  an der Stelle des Magnetometers war nach der Gauss'schen Methode bestimmt und betrug  $H = 0,1971$  Gauss.

Das Volumen der Ellipsoide resp. Zylinder wurde durch Wägung in Luft und Wasser, das Dimensionsverhältnis durch Ausmessung der beiden Ellipsoidachsen bestimmt. Der Entmagnetisierungskoeffizient berechnete sich genau genug nach der Formel

$$(7) \quad N = 4\pi \frac{B^3}{A^3} \left( \lg \frac{2A}{B} - 1 \right),$$

wo bei den Ellipsoiden  $A$  und  $B$  die große resp. kleine Halbachse bedeuten; bei den Zylindern ist  $A$  durch die halbe Länge  $L/2$ ,  $B$  durch den Zylinderradius  $r$  zu ersetzen.

Bezeichnet man ferner das Volumen des Ellipsoids mit  $V$ , den Abstand seines Mittelpunktes vom Magnetometer mit  $R$ , den Skalenabstand mit  $E$ , so berechnet sich die Magnetisierung  $\mathfrak{M}$  nach der Formel<sup>1)</sup>

$$(8) \quad \mathfrak{M} = \frac{HR^3}{4EV} \left( 1 - \frac{6}{5} \frac{A^3}{R^3} \right) e_{\text{corr.}}$$

wenn  $e_{\text{corr.}}$  den auf die trigonometrische Tangente korrigierten, mit Fernrohr und Skale beobachteten Ausschlag des Magnetometers bedeutet.

Für einen Zylinder hat man nach der Formel

$$(8') \quad \mathfrak{M} = \frac{HR^3}{4EV} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{5}{6} \frac{L}{R} \right)^2 \right\} e_{\text{corr.}}$$

zu rechnen, da für Zylinder  $\frac{5}{6}$  der Länge als Polabstand<sup>2)</sup> eine hinlänglich genaue Korrektur ergibt, da diese bei meiner Anordnung nur klein ist.

Die Feldstärke  $\mathfrak{S}$  berechnet sich aus der Beziehung

$$(9) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 - N\mathfrak{M} = \frac{4\pi n}{10} J - N\mathfrak{M}.$$

### § 3. Resultate: Magnetisierungskurven; Permeabilität.

#### Nr. 1. Gehärteter Remystahl.

Es wurde auf diese Weise die Magnetisierungskurve am gehärteten Remystahl aufgenommen, der bei der Firma Remy, Hagen i. W., käuflich ist. Wie man aus den Daten für die Remanenz und Koerzitivkraft (vgl. Fig. 4) ersieht, eignet sich dieses Material vorzüglich zur Herstellung permanenter Magnete, zumal, wenn man in Betracht zieht, daß wir das Feld mit unserer Anordnung nur bis 140 Gauss haben anwachsen lassen können, daß also die Zahlen für die größtmögliche Remanenz und Koerzitivkraft noch etwas größer sein werden.<sup>3)</sup>

1) Vgl. z. B. R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus, p. 55. Leipzig 1908.

2) Vgl. F. Kohlrausch u. W. Hallock, Wied. Ann. 22. p. 411. 1884.

3) H. Dubois u. E. Taylor Jones, Elektrotechn. Ztschr. 1896. p. 543.

Die Wägungen und Längenmessungen lieferten folgende Resultate:

Lfde. Nr.	Gewicht in Luft	Gewicht in $H_2O$ von $16,2^\circ$	Volum in $cm^3$	Spez. Gewicht	Durch Längen- messung		Be- rechnete kleine Achse
					2 A	2 B	
1	29,5190 g	25,8380 g	3,689	8,0025	cm 16,54	cm 0,6580	cm 0,6525

Die letzte Kolumne gibt den Wert von  $2B$  an, der sich aus der Formel

$$V = \frac{4\pi}{3} A B^2$$

ergibt, wenn man für  $A$  und  $V$  die durch Längenmessung und Wägung bestimmten Werte einsetzt.

Nach Formel (7) berechnet sich

$$N = 0,05718,$$

ferner war

$$E = 1606 \text{ mm}, \quad R = 72,63 \text{ cm}.$$

Nr. 1. Aufsteigende Kommutierungskurve.

$J$	$e_{\text{corr.}}$	$\mathfrak{M}$	$N\mathfrak{M}$	$\Phi_0 = \frac{4\pi n}{10} J$	$\Phi = \Phi_0 - N\mathfrak{M}$	$\mu = \frac{B}{\Phi}$
0,300	12,05	37,79	2,161	12,37	10,21	47,51
0,503	21,55	67,59	3,865	20,73	16,87	51,35
0,822	38,35	120,3	6,879	33,88	27,00	56,99
1,006	49,79	156,2	8,929	41,46	32,53	61,33
1,206	64,31	201,7	11,53	49,72	38,19	67,37
1,475	88,12	276,5	15,80	60,80	45,00	78,20
1,79	125,7	394,3	22,54	73,79	51,25	97,68
2,02	156,1	489,7	28,00	83,28	55,28	112,4
2,20	181,9	570,7	32,63	90,67	58,04	127,3
2,50	220,4	691,3	39,53	103,0	63,5	187,8
2,75	250,6	785,9	44,93	113,3	68,4	145,4
3,00	277,2	869,6	49,72	123,7	74,0	148,7
3,51	312,7	931,0	56,09	144,6	88,5	140,3
4,00	334,9	1051	60,07	164,9	104,8	127,0
4,96	362,4	1137	65,0	204,5	139,5	103,4

## Nr. 1. Absteigende Hysteresiskurve.

 $R = 77,82 \text{ cm.}$ 

$J$	$e_{\text{corr.}}$	$\mathfrak{M}$	$N\mathfrak{M}$	$\Phi_0 = \frac{4\pi n}{10} J$	$\Phi = \Phi_0 - N\mathfrak{M}$
5,00	289,7	1131	64,68	206,1	141,4
3,99	278,2	1086	62,10	164,4	102,3
2,99	263,5	1029	58,83	123,2	64,4
2,00	243,5	950,8	54,37	82,44	28,07
1,00	213,4	832,8	47,61	41,22	— 6,39
0,00	161,2	629,3	35,98	0,00	— 35,98
-0,50	118,3	461,8	26,40	- 20,61	- 47,01
-1,00	55,3	216,1	12,36	- 41,22	- 53,58
-1,505	- 22,8	- 88,8	- 5,08	- 62,04	- 56,96
-2,00	- 99,2	- 387,5	- 22,16	- 82,44	- 60,28
-2,515	- 172,6	- 673,5	- 38,50	- 103,6	- 65,1
-3,00	- 221,1	- 863,0	- 49,34	- 123,7	- 74,4
-3,50	- 250,0	- 976,0	- 55,80	- 144,2	- 88,4
-4,00	- 267,1	- 1043	- 59,62	- 164,9	- 105,3
-5,02	- 288,6	- 1127	- 64,43	- 206,9	- 142,4

## Nr. 1. Aufsteigende Hysteresiskurve.

$J$	$e_{\text{corr.}}$	$\mathfrak{M}$	$N\mathfrak{M}$	$\Phi_0 = \frac{4\pi n}{10} J$	$\Phi = \Phi_0 - N\mathfrak{M}$
-5,015	- 288,5	- 1126	- 64,39	- 206,8	- 142,4
-3,985	- 276,9	- 1080	- 61,75	- 164,3	- 102,6
-2,99	- 262,4	- 1025	- 58,60	- 123,2	- 64,6
-2,00	- 241,9	- 944,5	- 54,00	- 82,45	- 28,45
-1,00	- 211,9	- 827,0	- 47,29	- 41,22	+ 6,07
0,00	- 160,8	- 627,7	- 35,89	0,00	+ 35,89
+0,50	- 116,8	- 456,0	- 26,07	+ 20,61	+ 46,68
+1,00	- 53,2	- 207,9	- 11,89	+ 41,22	+ 58,11
1,50	+ 23,8	+ 98,1	+ 5,32	61,83	56,51
2,00	+ 102,2	+ 398,8	+ 22,80	82,45	59,65
2,51	+ 174,2	+ 630,0	+ 38,88	103,4	64,5
3,00	+ 222,8	+ 869,8	+ 49,73	123,7	74,0
3,51	+ 252,2	+ 984,4	+ 56,28	144,6	88,3
4,00	+ 268,7	+ 1050	+ 60,03	164,9	104,9
5,015	+ 290,0	+ 1132	+ 64,73	206,8	142,1



Die Ergebnisse dieser Messungen sind in den Figg. 4 und 5 graphisch dargestellt.

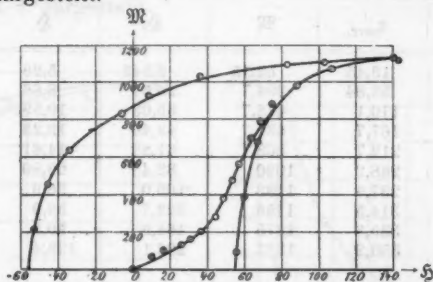


Fig. 4. Nr. 1. Gehärteter Remystahl. Magnetisierungskurve.

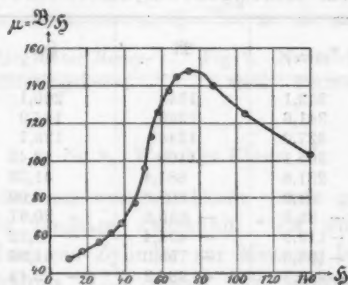


Fig. 5. Nr. 1. Gehärteter Remystahl. Permeabilitätskurve.

#### Nr. 2. Geglühter Remystahl.

Aus demselben Remystahl wurde ein Ellipsoid hergestellt und dieses zweimal geglüht und langsam im Holzkohlenfeuer abgekühlt.

Die Wägungen und Längenmessungen lieferten folgende Resultate:

Lfde. Nr.	Gewicht in Luft	Gewicht in $H_2O$ von $9,5^\circ$	Volum in $cm^3$	Spez. Gewicht	Durch Längen- messung		Be- rechnete kleine Achse
					2 A	2 B	
2	29,912	26,182	3,736	8,008	16,48	0,6593	0,6582

$$N = 0,05898.$$

Ferner war

$$R = 77,70 \text{ cm}, \quad E = 1605 \text{ mm}.$$

## Nr. 2. Aufsteigende Kommutierungskurve.

$J$	$e_{\text{corr.}}$	$\mathfrak{M}$	$\oint_0$	$\oint$	$\mu = \mathfrak{B}/\oint$
0,20	13,45	51,15	8,243	5,26	123
0,50	53,84	204,7	20,61	8,66	298
0,85	110,1	418,7	35,03	10,59	498
1,20	167,7	637,7	49,46	12,23	656
1,50	212,7	808,7	61,83	14,61	696
2,00	268,2	1020	82,43	22,89	561
2,50	297,9	1183	103,0	36,9	887
3,00	314,5	1196	123,7	53,9	280
4,00	335,3	1275	164,9	90,5	178
5,00	350,2	1331	206,1	128,4	131

## Nr. 2. Absteigende Hysteresiskurve.

$J$	$e_{\text{corr.}}$	$\mathfrak{M}$	$\oint_0$	$\oint$
5,00	353,1	1343	206,1	127,7
4,00	341,6	1299	164,9	89,0
3,00	327,0	1244	123,7	51,1
2,00	305,1	1160	82,43	14,7
1,00	231,8	881,4	41,22	- 10,24
0,00	54,0	205,3	0,00	- 11,99
-0,50	- 35,7	- 135,8	- 20,61	- 12,68
-1,00	- 119,5	- 454,4	- 41,22	- 14,68
-1,50	- 198,6	- 755,3	- 61,83	- 17,73
-2,00	- 258,8	- 984,2	- 82,43	- 24,97
-3,00	- 315,2	- 1199	- 123,7	- 53,7
-4,00	- 338,7	- 1288	- 164,9	- 89,7
-5,00	- 351,9	- 1339	- 206,1	- 128,0

## Nr. 2. Aufsteigende Hysteresiskurve.

$J$	$e_{\text{corr.}}$	$\mathfrak{M}$	$\oint_0$	$\oint$
-5,00	- 353,2	- 1343	- 206,1	- 127,7
-4,00	- 342,0	- 1300	- 164,9	- 89,0
-3,00	- 327,6	- 1246	- 123,7	- 51,0
-2,00	- 305,4	- 1161	- 82,43	- 14,62
-1,00	- 229,9	- 874,2	- 41,22	+ 9,82
0,00	- 52,5	- 199,6	0,00	+ 11,66
+0,50	- 36,7	- 139,5	+ 20,61	+ 12,46
+1,00	+ 122,0	+ 463,9	+ 41,22	+ 14,13
+1,50	+ 198,0	+ 753,1	+ 61,83	+ 17,87
+2,00	+ 257,2	+ 977,9	+ 82,43	+ 25,33
+3,00	+ 310,8	+ 1182	+ 123,7	+ 54,7
+4,00	+ 332,2	+ 1263	+ 164,9	+ 91,1
+5,00	+ 344,0	+ 1308	+ 206,1	+ 129,7

Die Ergebnisse der Messungen sind graphisch in den Figg. 6 und 7 dargestellt.

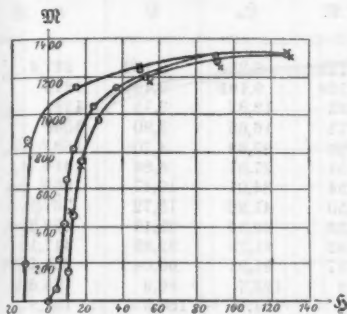


Fig. 6. Nr. 2. Geglühter Remystahl. Magnetisierungskurve.

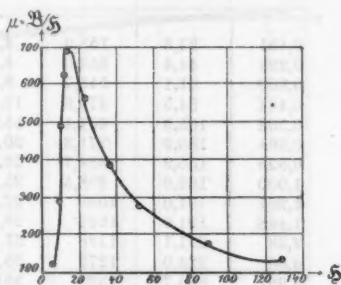


Fig. 7. Nr. 2. Geglühter Remystahl. Permeabilitätskurve.

#### Nr. 9. Weiches Eisen.

Ein Zylinder aus weichem Eisen wurde geglüht und im Holzkohlenfeuer langsam abgekühlt. Es wurde hier kein Ellipsoid, sondern ein Zylinder zur Messung benutzt, da das Dimensionsverhältnis  $B/A$  wegen der starken Entmagnetisierung, die beim weichen Eisen auftritt, sehr klein gewählt werden mußte, wenn die Resultate nicht zu ungenau werden sollten, und da es sehr schwierig ist, ein so gestrecktes Ellipsoid genau zu drehen. Die hierdurch begangenen Fehler werden aber nur klein sein.

Die Längenmessungen und Wägungen ergaben:

Lfd. Nr.	Gewicht in Luft	Gewicht in $H_2O$ von $12,1^\circ$	Volum in $cm^3$	Spez. Gewicht	Durch Längenmessung		Berechneter Radius
					$L$	$r$	
9	15,7334	13,7286	2,008	7,8355	15,99	0,2000	0,2000

$$N = 0,0266.$$

Ferner war

$$R = 72,33 \text{ cm}, \quad E = 1608 \text{ mm}.$$

## Nr. 9. Aufsteigende Kommutierungskurve.

$J$	$e_{\text{corr.}}$	$\mathfrak{M}$	$N\mathfrak{M}$	$\mathfrak{S}_0$	$\mathfrak{S}$	$\mu$
0,151	27,3	155,0	4,122	6,224	2,102	927,4
0,223	44,4	252,0	6,704	9,191	2,487	1275
0,300	61,1	346,7	9,22	12,37	3,15	1384
0,404	84,5	479,6	12,75	16,65	3,90	1546
0,502	105,9	601,1	15,99	20,69	4,70	1608
0,664	135,9	771,3	20,51	27,37	6,86	1414
0,825	155,9	884,7	23,54	34,01	10,47	1063
1,000	168,9	958,5	25,50	41,22	15,72	767,1
1,201	181,0	1028	27,33	49,50	22,17	583,2
1,498	191,6	1087	28,92	61,75	32,83	417,1
2,23	211,1	1198	31,87	91,91	60,04	251,7
3,00	224,0	1272	33,8	123,7	89,9	178,6
3,98	235,7	1338	35,6	164,1	128,5	131,8
5,00	245,5	1393	37,1	206,1	169,0	104,6

## Nr. 9. Absteigende Hysteresiskurve.

$J$	$e_{\text{corr.}}$	$\mathfrak{M}$	$N\mathfrak{M}$	$\mathfrak{S}_0$	$\mathfrak{S}$
5,07	245,5	1393	37,07	208,9	171,8
2,99	224,9	1276	33,95	123,2	89,3
1,00	177,6	1008	26,81	41,22	14,41
0,50	124,3	705,3	18,76	20,61	1,85
0,00	12,0	68,11	1,811	0,00	— 1,81
-0,50	-103,0	- 584,5	-15,55	- 20,61	- 5,06
-1,50	-191,8	-1089	-28,96	- 61,33	- 32,87
-2,51	-216,8	-1230	-32,73	-103,5	- 70,8
-4,03	-237,7	-1319	-35,88	-166,2	-130,3
-5,01	-247,0	-1402	-37,29	-206,5	-169,2

## Nr. 9. Aufsteigende Hysteresiskurve.

$J$	$e_{\text{corr.}}$	$\mathfrak{M}$	$N\mathfrak{M}$	$\mathfrak{S}_0$	$\mathfrak{S}$
-3,97	-238,5	-1354	-36,00	-163,7	-127,7
-2,00	-210,3	-1193	-31,75	- 82,43	- 50,68
-0,82	-168,0	- 953,5	-25,36	- 33,80	- 8,44
-0,30	- 84,9	- 481,8	-12,31	- 12,37	+ 0,44
+0,20	+ 33,4	+ 217,9	+ 5,797	+ 8,243	+ 2,446
+0,35	72,2	409,8	+10,90	14,43	+ 3,53
+0,81	150,9	856,5	+22,78	33,39	+ 10,61
+2,00	203,7	1156	+30,75	82,43	+ 51,68
+3,50	228,8	1298	+34,53	144,3	+109,8

Die Ergebnisse sind graphisch in den Figg. 8 und 9 dargestellt.

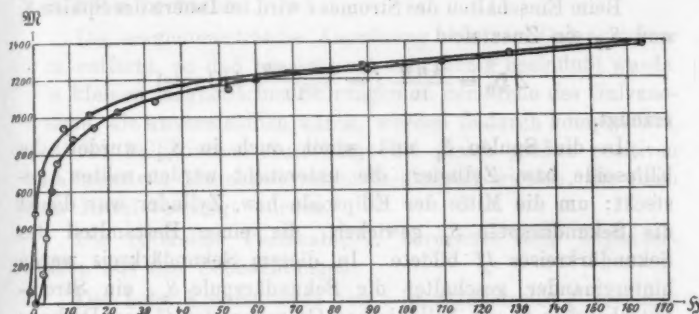


Fig. 8. Nr. 9. Weiches Eisen. Magnetisierungskurve.

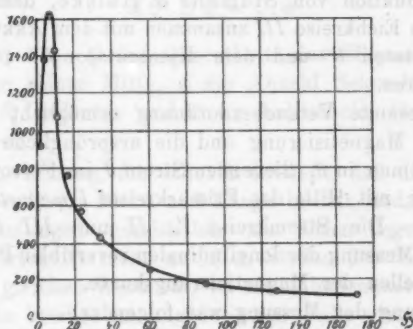


Fig. 9. Nr. 9. Weiches Eisen. Permeabilitätskurve.

#### § 4. Versuchsanordnung zur Messung der reversiblen Permeabilität; Resultate.

Zur Bestimmung der reversiblen Permeabilität muß man zu einem gegebenen Felde ein Zusatzfeld hinzufügen können. Zu diesem Zwecke dient der Stromkreis  $I'$  in Fig. 3, den wir den zweiten Primärkreis nennen wollen. Er besteht aus der Magnetisierungsspule  $S_{12}$  aus einer Lage Kupferdraht von 1 mm Durchmesser, die unmittelbar über die Spule  $S_1$  gewickelt war (in der Figur sind  $S_1$  und  $S_{12}$  nebeneinander gezeichnet), ferner

aus dem Akkumulator  $A$ , dem Stöpselrheostaten  $w$  und dem Kommutator  $C'$ .

Beim Einschalten des Stromes  $i$  wird im Innern der Spulen  $S_1$  und  $S_{12}$  ein Zusatzfeld

$$\Delta \mathfrak{H}_0 = \frac{4\pi n'}{10} i = \frac{4\pi \cdot 8,091}{10} i \text{ (Gauss)}$$

erzeugt.

In die Spulen  $S_1$  und somit auch in  $S_{12}$  wurden die Ellipsoide bzw. Zylinder, die untersucht werden sollten, gesteckt; um die Mitte der Ellipsoide bzw. Zylinder war direkt die Sekundärspule  $S_2$  gewickelt, die einen Bestandteil des Sekundärkreises  $II$  bildete. In diesem Sekundärkreis waren hintereinander geschaltet die Sekundärspule  $S_2$ , ein Stromunterbrecher  $U$ , ein ballistisches Galvanometer  $G$  von Dubois und Rubens, die Sekundärspule  $p_2$  eines Normals der gegenseitigen Induktion von Siemens & Halske, dessen Primärspule  $p_1$  im Eichkreise  $III$  zusammen mit dem Akkumulator  $A'$ , dem Rheostaten  $W$  und dem Kommutator  $C''$  in Serie geschaltet waren.

Die gesamte Versuchsanordnung ermöglicht es, die ursprüngliche Magnetisierung und die ursprüngliche Feldstärke, die durch einen in  $S_1$  fließenden Strom  $J$  im Ferromagnetikum erzeugt war, mit Hilfe des Primärkreises  $I$  *magnetometrisch* zu bestimmen. Die Stromkreise  $I'$ ,  $II$  und  $III$  dienten zur *ballistischen* Messung der longitudinalen reversiblen Permeabilität an allen Stellen der Magnetisierungskurve.

Der Gang der Messung war folgender:

Es wurde ein Strom  $J$  in den Primärkreis  $I$  eingeschaltet, der die Magnetisierung  $\mathfrak{M}$  hervorrief (natürlich bei offenem Unterbrecher  $U$  in  $II$ , da das Galvanometer viel zu empfindlich war, um die hierdurch hervorgerufenen Stromstöße vertragen zu können), sodann wurde in den zweiten Primärkreis  $I'$  ein Strom  $i$  eingeschaltet, der ein Zusatzfeld  $\Delta \mathfrak{H}$  im Ferromagnetikum hervorrief. Nachdem dieser Strom  $i$  einige Male kommutiert war, wodurch bewirkt wurde, daß sicher die nun folgenden Feldänderungen  $\Delta \mathfrak{H}$  *reversible* Induktionsänderungen  $\Delta \mathfrak{B}$  hervorriefen, wurde am Magnetometer mit Fernrohr und Skale der Ausschlag  $e$ , der die Magnetisierung bestimmt, abgelesen, dann der Strom  $i$  mit Hilfe des Stromwenders  $C'$  ein-



mal kommutiert, und der dadurch entstehende ballistische Ausschlag  $\alpha$  am Galvanometer mit einem anderen Fernrohr und Skale beobachtet.

Die magnetometrische Anordnung war vom Galvanometer 5 m entfernt, so daß letzteres nur sehr wenig beeinflusst wurde. Die kleinen magnetischen Störungen an der Stelle des Galvanometers, die unvermeidlich waren, wurden dadurch kompensiert, daß die ballistischen Ausschläge bei gleich großen positiven und negativen Magnetisierungen beobachtet wurden, die dann zum Mittel vereinigt wurden.

Die reversible Permeabilität berechnet sich folgendermaßen aus den Beobachtungen:

Der beim Kommutieren von  $i$  im Stromkreise  $I'$  erzeugte ballistische Ausschlag  $\alpha$  entspricht einer Induktionsänderung  $\Delta \mathfrak{B}$ , die durch

$$(10) \quad ZQ \cdot \Delta \mathfrak{B} = C \cdot \alpha$$

gegeben ist, wenn  $Q$  den Querschnitt des Ellipsoids bzw. des Zylinders in seiner Mitte,  $Z$  die Anzahl Sekundärwindungen der Spule  $S_2$  bedeuten und  $C$  die ballistische Galvanometerkonstante ist.

Die Abweichung, die dadurch entsteht, daß die Sekundärspule eine endliche Dicke und Länge besitzt, sodaß nicht alle Sekundärwindungen unmittelbar am Eisen lagen und der Ellipsoidquerschnitt nicht an allen Stellen der Sekundärspule genau den gleichen Wert hat, ist als unbedeutend zu vernachlässigen, sie beträgt im ungünstigsten Falle einmal bei einer Einzelmessung 1 Proz., wovon ich mich durch eine diesbezügliche Rechnung überzeugte.

Zur Eichung des Galvanometers, d. h. zur Bestimmung von  $C$  wurde im Eichkreise  $III$  der Strom  $i_0$  einmal kommutiert; dieser Stromstoß erzeugte wegen der wechselseitigen Induktion  $p$  im Sekundärkreise  $II$  den Ausschlag  $\alpha_0$ , so daß die Beziehung

$$(11) \quad 2 p i_0 = C \alpha_0$$

besteht. Aus (10) und (11) folgt

$$(12) \quad \Delta \mathfrak{B} = \frac{\alpha 2 p i_0}{Z Q \alpha_0}$$

Ferner ist das Zusatzfeld  $\Delta \mathfrak{H}_0$ , welches durch Kommunizieren von  $i$  im Kreise  $I'$  erzeugt wird,

$$(13) \quad \Delta \mathfrak{H}_0 = 2.4 \pi n' i,$$

wenn  $i$  in absolutem elektromagnetischen Maß gemessen wird. Division von (12) und (13) ergibt

$$(14) \quad \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}_0} = \frac{p}{Z Q \alpha_0 4 \pi n'} \cdot \frac{i_0}{i} \alpha.$$

Die Stromquellen im Kreise  $I'$  und  $III$  waren in Wirklichkeit nicht die Akkumulatoren  $A$  bzw.  $A'$ , sondern derselbe Akkumulator; infolgedessen verhalten sich die Ströme  $i_0$  und  $i$  umgekehrt wie die Widerstände  $W$  und  $w$  der entsprechenden Stromkreise, also ist schließlich

$$(15) \quad \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}_0} = \frac{p w}{Z Q \alpha_0 4 \pi n' W} \alpha.$$

Gesucht ist aber nicht  $\Delta \mathfrak{B} / \Delta \mathfrak{H}_0$ , sondern  $\Delta \mathfrak{B} / \Delta \mathfrak{H}$ , wo  $\Delta \mathfrak{H}$  die wirklich im Eisen auftretende Feldänderung bedeutet.

Nach der Formel

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - N \mathfrak{M} = \mathfrak{H}_0 - N \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4 \pi}$$

berechnet sich nun

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} \left( 1 - \frac{N}{4 \pi} \right) + \frac{N}{4 \pi} \mathfrak{B},$$

also

$$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}} = \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}_0} \cdot \frac{\Delta \mathfrak{H}_0}{\Delta \mathfrak{H}} = \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}_0} \left\{ 1 - \frac{N}{4 \pi} + \frac{N}{4 \pi} \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}} \right\},$$

oder schließlich

$$(16) \quad \mu_r = \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}} = \frac{\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}_0} \left( 1 - \frac{N}{4 \pi} \right)}{1 - \frac{N}{4 \pi} \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}_0}}.$$

Nach Formel (15) ist also zunächst  $\Delta \mathfrak{B} / \Delta \mathfrak{H}_0$  und dann nach Formel (16)  $\mu_r$  zu berechnen.

Da die Erwärmung der Primärspule im Laufe einer Meßreihe die Temperatur der Sekundärspule in Mitleidenschaft zog, wurde nach einigen Messungen der Eichausschlag  $\alpha_0$  immer wiederholt.

Die in den folgenden Tabellen angegebenen Werte  $\alpha_0$  sind stets die Mittel zweier nicht wesentlich voneinander abweichender Werte, die vor und nach einem Satz von Beob-

achtungen bestimmt wurden. Auch die Werte  $\alpha$  sind Mittel aus zwei Ausschlägen nach rechts und links.

Das gegenseitige Induktionsnormal von Siemens & Halske hatte den Nennwert 0,01 Henry, in Wirklichkeit betrug die wechselseitige Induktion aber nach einer von der Firma beigegebenen Korrekturstabelle

$$p = 0,00990 \text{ Henry} = 0,99 \cdot 10^7 \text{ cm.}$$

Ferner war

$$W = 2004 \text{ S.E.}, \quad n' = 8,091 [1/\text{cm}].$$

Im folgenden sind die Meßresultate zusammengestellt.

#### Nr. 1. Gehärteter Remystahl.

Es war

$$w = 100,7 [\text{S.E.}], \quad Q = 0,6580^2 \frac{\pi}{4} [\text{cm}^2],$$

$$Z = 520, \quad n' = 8,091 [1/\text{cm}],$$

$$E = 1606 [\text{mm}], \quad R = 72,63 [\text{cm}],$$

$$N = 0,05718.$$

#### Nr. 1. Aufsteigende Kommutierungskurve.

$\epsilon_{\text{corr.}}$	$\alpha_0$	$\alpha$	$\mathfrak{M}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi_0}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi}$
9,2	73,97	80,9	28,86	30,28	34,96
14,0	"	83,2	43,91	31,15	36,12
41,6	"	83,6	130,5	31,30	36,33
85,18	"	82,25	267,1	30,80	35,66
155,5	71,57	73,5	487,7	28,43	32,52
274,1	"	55,0	860,0	21,28	23,45
359,5	"	30,0	1128	11,60	12,20
— 6,0	72,35	79,1	— 18,88	30,28	34,94
— 22,5	"	82,45	70,58	31,56	36,67
— 51,0	"	83,4	160,0	31,93	37,17
— 92,91	"	81,9	291,4	31,34	36,39
— 229,3	70,88	63,6	719,2	24,88	27,94
— 318,7	"	45,9	1000	17,96	19,46

Nr. 1. Absteigende Hysteresiskurve.

$e_{\text{corr.}}$	$\alpha_0$	$\alpha$	$\mathfrak{M}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}_0}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}}$
336,5	70,72	36,8	1055	14,40	15,33
302,3	"	43,2	948,2	18,86	20,53
286,6	72,22	54,1	899,1	20,74	22,79
239,6	"	67,4	751,6	25,84	29,15
172,7	"	81,45	541,7	31,23	36,23
95,91	"	86,75	300,8	33,26	39,01
24,6	"	86,95	77,16	33,33	39,11
- 33,8	"	83,7	- 106,0	32,08	37,39
-134,7	70,72	75,5	- 422,5	29,53	33,96
-235,9	"	52,9	- 896,8	20,70	22,74
-343,3	"	36,65	-1076	14,34	15,27

Nr. 1. Aufsteigende Hysteresiskurve.

$e_{\text{corr.}}$	$\alpha_0$	$\alpha$	$\mathfrak{M}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}_0}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}}$
-354,7	70,8	34,45	-1113	13,48	14,29
-331,3	"	41,65	-1040	16,29	17,52
-292,1	72,25	54,6	- 916,2	20,93	23,03
-271,7	"	60,4	- 852,3	23,15	25,75
-206,3	"	75,5	- 647,1	28,94	33,17
-151,2	"	83,3	- 474,3	31,93	37,18
- 68,95	"	86,1	- 216,3	33,01	38,67
+ 26,5	"	82,3	+ 83,12	31,55	36,66
+214,0	70,8	62,9	+ 671,2	24,61	27,58
+313,5	"	42,6	+ 933,3	16,66	17,95

Die graphische Darstellung findet sich in den Figg. 10 u. 11.

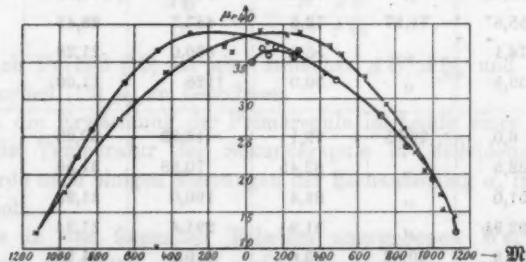


Fig. 10. Nr. 1. Gehärteter Remystahl. Reversible longitudinale Permeabilität als Funktion der Magnetisierung.

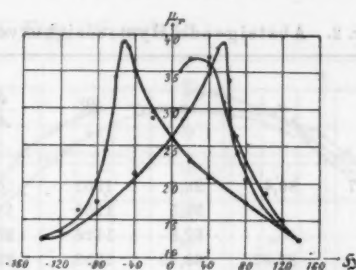


Fig. 11. Nr. 1. Gehärteter Remystahl. Reversible longitudinale Permeabilität als Funktion der Feldstärke.

Nr. 2. Geglühter Remystahl.

Es war

$$\begin{aligned} Z &= 300, & Q &= 0,6593^2 \pi/4, \\ E &= 1606 \text{ mm}, & n' &= 8,091 [1/\text{cm}], \\ R &= 72,60 \text{ cm}, & N &= 0,05888. \end{aligned}$$

Da  $\mu_r$  sich bei weichem Material sehr stark verändert, so mußte durch Veränderung von  $w$  an den verschiedenen Stellen der Magnetisierungskurve der Strom  $i$  und damit  $\Delta \Phi$  variiert werden. Infolgedessen ist in den nächsten Tabellen überall  $w$  in S.E. angegeben.

Nr. 2. Aufsteigende Kommutierungskurve.

$e_{\text{corr.}}$	$w$	$\alpha_0$	$\alpha$	$\mathfrak{R}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi_0}$	$\mu_r = \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi}$
1,3	100,7	86,07	84,05	4,02	46,66	59,29
21,0	"	"	84,0	64,97	46,62	59,24
70,35	"	"	82,65	217,7	45,87	58,04
138,4	"	"	78,1	412,8	43,35	54,04
210,1	"	"	68,75	649,9	38,16	46,17
257,3	"	"	63,2	796,0	35,08	41,71
326,7	70,7	85,5	47,0	1010	26,29	29,82
380,7	"	"	44,0	1178	17,27	18,68
428,0	"	"	27,7	1324	10,86	11,40
- 0,3	100,7	86,17	84,4	-0,93	46,78	59,51
- 16,7	"	"	84,8	51,66	47,01	59,87
- 66,95	"	"	83,2	207,1	46,12	58,42
-131,6	"	"	78,55	407,0	43,55	54,36
-204,2	"	"	71,0	631,7	39,37	47,95
-261,1	"	"	62,25	807,8	34,50	40,90
-328,0	70,7	84,62	67,05	1015	26,59	30,19
-386,1	"	"	44,55	1195	17,66	19,15
-430,2	"	"	27,85	1331	11,04	11,59

## Nr. 2. Absteigende Hysteresiskurve.

$e_{\text{corr.}}$	$\theta$	$\alpha_0$	$\alpha$	$\mathfrak{N}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi_0}$	$\mu_r = \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi}$
420,6	70,7	86,4	28,1	1301	10,91	11,44
390,8	"	"	39,5	1209	15,34	16,44
363,8	"	"	52,8	1126	20,50	22,56
340,5	"	87,87	66,75	1053	25,49	28,77
275,0	"	"	91,95	850,7	35,11	41,76
192,5	100,7	"	74,95	595,6	40,76	50,03
128,1	"	"	78,8	396,3	42,84	53,26
60,97	"	"	80,55	188,7	43,80	54,74
- 8,0	"	"	81,15	- 24,75	44,13	55,25
- 77,84	"	"	80,05	- 240,2	43,53	54,32
-173,0	"	"	73,5	- 535,2	39,96	48,86
-247,5	"	"	62,95	- 765,8	34,23	40,52
-321,5	70,7	85,30	70,2	- 994,7	27,62	31,54
-387,3	"	"	44,55	-1193	17,53	19,00
-428,3	"	"	28,4	-1325	11,17	11,78

## Nr. 2. Aufsteigende Hysteresiskurve.

$e_{\text{corr.}}$	$\theta$	$\alpha_0$	$\alpha$	$\mathfrak{N}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi_0}$	$\mu_r = \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi}$
-429,3	70,7	84,72	28,4	-1328	11,25	11,81
-399,0	"	"	39,5	-1234	15,64	16,79
-371,9	"	"	53,4	-1151	21,14	23,34
-344,9	"	86,88	67,6	-1067	26,11	29,58
-279,9	"	"	94,2	- 866,0	36,40	43,61
-188,3	100,7	"	76,9	- 582,6	42,31	52,41
-129,8	"	"	80,2	- 401,6	44,13	55,25
- 60,57	"	"	80,65	- 187,4	44,37	55,64
+ 8,0	"	"	80,9	+ 24,75	44,50	55,84
+ 82,84	"	"	77,95	+ 256,3	42,88	53,31
+169,5	"	"	71,8	+ 524,4	39,50	48,16
245,3	"	"	62,5	759,0	34,39	40,74
315,8	70,7	85,70	69,85	977,0	27,34	31,18
379,8	"	"	44,85	1175	17,56	19,03
421,7	"	"	27,7	1305	10,84	11,37

Vgl. auch Figg. 12 und 13.

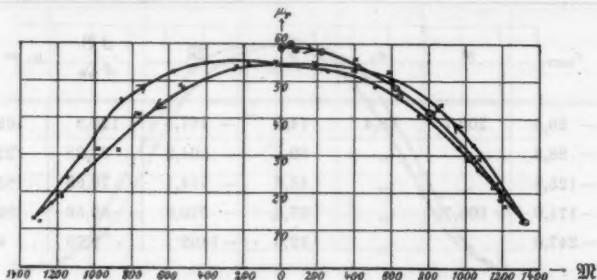


Fig. 12. Nr. 2. Geglühter Remystahl. Reversible longitudinale Permeabilität als Funktion der Magnetisierung.

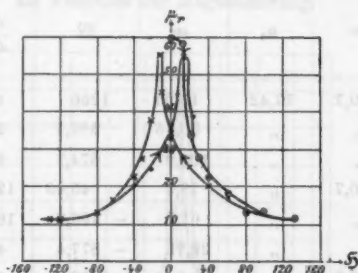


Fig. 13. Nr. 2. Geglühter Remystahl. Reversible longitudinale Permeabilität als Funktion der Feldstärke.

#### Nr. 9. Weiches Eisen.

Es war

$$Z = 600, \quad Q = 0,0400 \pi [\text{cm}^2],$$

$$E = 1608 \text{ mm}, \quad n' = 8,091 [1/\text{cm}],$$

$$R = 72,33 \text{ cm}, \quad N = 0,0266.$$

#### Nr. 9. Aufsteigende Kommutierungskurve.

$e_{\text{corr.}}$	$\alpha$	$\alpha_0$	$\alpha$	$\mathfrak{M}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}_0}$	$\mu_r = \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \mathfrak{H}}$
0,00	200,7	78,92	77,15	0,0	124,2	168,1
61,0	"	"	69,0	346,1	111,0	144,9
153,9	"	"	26,75	873,4	43,05	47,26
179,4	100,7	"	30,6	1019	24,71	26,02
204,7	"	"	19,85	1162	16,03	16,56

## Nr. 9. (Fortsetzung).

$e_{\text{corr.}}$	$w$	$\alpha_0$	$\alpha$	$\mathfrak{M}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi_0}$	$\mu_r = \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi}$
- 29,5	200,7	78,4	74,6	- 167,4	120,9	162,1
- 88,3	"	"	60,1	- 501,2	97,88	122,5
- 125,8	"	"	43,6	- 714,1	70,65	82,88
- 171,0	100,7	"	37,6	- 970,5	80,56	32,61
- 247,0	"	"	12,0	- 1402	9,75	9,94

## Nr. 9. Absteigende Hysteresiskurve.

$e_{\text{corr.}}$	$w$	$\alpha_0$	$\alpha$	$\mathfrak{M}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi_0}$	$\mu_r = \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi}$
221,9	100,7	77,42	15,55	1260	12,80	13,13
174,4	"	"	30,45	999,7	25,07	26,41
118,9	"	"	101,9	674,7	83,89	101,8
8,0	200,7	"	73,5	45,40	120,6	161,6
- 86,9	"	"	61,5	- 493,2	100,9	128,0
- 154,6	"	"	26,75	- 877,4	43,89	48,30
- 196,0	100,7	"	24,1	- 1113	19,84	20,66
- 239,3	"	"	13,25	- 1358	10,91	11,14

## Nr. 9. Aufsteigende Hysteresiskurve.

$e_{\text{corr.}}$	$w$	$\alpha_0$	$\alpha$	$\mathfrak{M}$	$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi_0}$	$\mu_r = \frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \Phi}$
- 211,1	100,7	76,75	19,2	- 1198	15,73	16,95
- 168,5	"	"	40,7	- 956,3	33,34	39,50
- 153,6	"	"	61,7	- 871,8	50,54	66,27
- 73,6	200,7	"	68,8	- 417,7	113,9	149,7
+ 48,0	"	"	68,75	+ 272,4	113,8	149,6
+ 121,2	"	"	43,0	+ 687,9	71,17	83,62
+ 165,1	100,7	"	37,7	+ 937,2	30,88	36,08
+ 202,0	"	"	20,2	+ 1147	16,55	17,92



Man vgl. die Figg. 14 und 15.

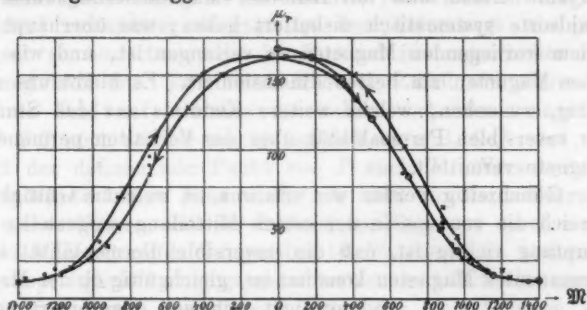


Fig. 14. Nr. 9. Weiches Eisen. Reversible longitudinale Permeabilität als Funktion der Magnetisierung.

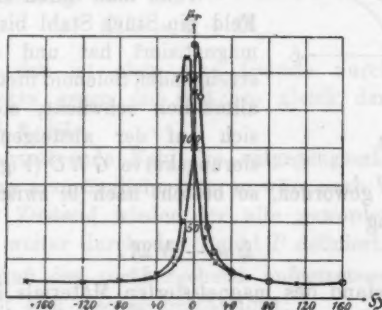


Fig. 15. Nr. 9. Weiches Eisen. Reversible longitudinale Permeabilität als Funktion der Feldstärke.

### § 5. Theorie des permanenten Magnetismus.

Auf Grund der vorliegenden Beobachtungen sind wir in der Lage, über das Verhalten permanent magnetisierter Ellipsoide (bzw. gestreckter Zylinder) und permanent magnetisierter geschlitzter Kreise einige Aussagen zu machen, die für die Auswahl des Materials sowie für die Magnetisierungsmethode von Interesse sein werden. Die Grundgedanken dieser Überlegungen finden sich in einer interessanten Arbeit von Dubois und Taylor Jones<sup>1)</sup>,

1) H. Dubois u. Taylor Jones, Elektrotechn. Zeitschr. p 543. 1896; vgl. auch R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus p. 58. Leipzig 1908.

die zum ersten Male mit Hilfe der Magnetisierungskurve der Stahlorte systematisch diskutiert haben, was überhaupt von einem vorliegenden Magneten zu verlangen ist, und wie man einen Magneten am besten dimensioniert. Es bleibt uns noch übrig, zu sehen, welche weitere Kenntnis uns das Studium der reversiblen Permeabilität über das Verhalten permanenter Magnete vermittelt.

Gleichzeitig werden wir erfahren, in welchem Gültigkeitsbereich die von uns in der ersten Mitteilung aufgestellte Behauptung richtig ist, daß die (reversible) Permeabilität eines permanenten Magneten konstant ist, gleichgültig ob der Magnet gar nicht, schwach oder bis zu seiner Sättigung permanent magnetisiert ist.

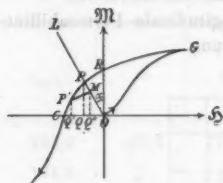


Fig. 16.

Wenn man durch ein sehr starkes Feld ein Stück Stahl bis zur Sättigung magnetisiert hat und den im felderzeugenden Solenoid fließenden Strom  $J$  allmählich schwächt, so bewegt man sich auf der absteigenden Magnetisierungskurve  $GRC$  (Fig. 16). Ist der

Strom  $J = 0$  geworden, so besteht nach (9) zwischen  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{M}$  die Beziehung

$$(17) \quad \mathfrak{H} = -N \mathfrak{M}.$$

Der Zustand des magnetisierten Materials ist also durch einen Punkt  $P$  der  $\mathfrak{M}, \mathfrak{H}$ -Ebene definiert, der erstens auf dem absteigenden Hysteresisast, zweitens auf der durch (17) gegebenen Geraden  $OL$  liegt, deren Neigung  $\alpha$  gegen die  $\mathfrak{M}$ -Achse

$$(18) \quad N = \operatorname{tg} \alpha$$

beträgt; das bedeutet: die maximale remanente Magnetisierung  $PQ$  hängt wesentlich von dem Entmagnetisierungskoeffizienten  $N$ , also von der Form des Magneten ab; bei gegebenem Magnetisierungskoeffizienten wird  $PQ$  um so größer sein, je größer die Remanenz  $OR$  ist, und je weniger steil der Hysteresisast von  $R$  bis  $C$  abfällt, d. h. je größer die Koerzitivkraft  $OC$  ist.

Den Punkt  $P$  der  $\mathfrak{M}, \mathfrak{H}$ -Kurve, durch den der magnetische Zustand definiert ist, wollen wir den definierenden Punkt nennen.

Ein durch den Punkt  $P$  definierter (also maximal magnetisierter) remanenter Magnet ist nun keineswegs als permanent zu bezeichnen, da der Zustand in magnetischer Beziehung labil ist. Tritt nämlich durch Zufall ein störendes äußeres Feld auf, welches das schon vorhandene negative Feld  $OQ$  noch stärker macht, so daß es z. B.  $OQ'$  wird, so rückt der definierende Punkt von  $P$  nach  $P'$ . Verschwindet das störende äußere Feld wieder, so muß die Magnetisierung sich so verändern, daß der Zustand des Magneten durch einen Punkt  $M$  der Geraden  $OL$  gegeben ist, da aber diese Änderung der ursprünglichen entgegengerichtet ist, so ist dieselbe reversibel, der Punkt bewegt sich also beim Verschwinden des störenden Feldes von  $P'$  nach  $M$  auf der Geraden  $P'M$ , die durch die Gleichung

$$(5) \quad \mathfrak{M} = \kappa, \mathfrak{H} + \mathfrak{M}_w$$

gegeben ist; das ist aber eine Gerade durch  $P'$ , deren Neigungstangente gegen die  $\mathfrak{H}$ -Achse gleich der reversiblen Suszeptibilität  $\kappa$  ist.

Hätte das störende Feld die entgegengesetzte Richtung gehabt wie das ursprüngliche  $OQ$ , so wäre nach Verschwinden desselben der Zustand wieder der alte geworden, d. h. der Magnet wäre weiter durch den Punkt  $P$  definiert.

Der Einfluß des vorübergehend aufgetretenen störenden Feldes  $\mathfrak{H}_0$  läßt sich also so beschreiben:

Der definierende Punkt des Magneten wird  $P'$ . Der Magnet befindet sich in einem Punkte  $M$  der Geraden  $OL$ , welcher gefunden wird, indem man in oben angegebener Weise  $P'M$  mit  $OL$  zum Schnitt bringt. Durch die zufällige Störung ist also die Magnetisierung kleiner geworden, sie ist nur noch  $Q'M$ , aber jetzt ist Stabilität vorhanden, denn vorübergehende störende Felder bis zum Betrage  $Q'Q$  werden keine dauernden Änderungen hervorrufen, weil in diesem Bereiche alles reversibel ist.

In der Praxis wird man diese Stabilisierung nun nicht dem Zufall überlassen (natürliches Altern), sondern man wird, nachdem  $J=0$  geworden ist, wenn man sich also in  $P$  befindet, noch einen negativen Strom einschalten, der den Magneten in den definierenden Punkt  $P'$  bringt. Schaltet man

diesen wieder aus, so sind Feld und Magnetisierung durch  $M$ , der Stabilitätsbereich durch  $Q'Q''$  gegeben (und zwar gilt dieser Stabilitätsbereich nur für Änderungen des Feldes in der Richtung nach  $C$  hin (Fig. 16)). Für Änderungen in der anderen Richtung ist ja ohne weiteres Stabilität vorhanden.

Man sieht sofort, daß große Stabilität auf Kosten der Magnetisierung geht, aber um so weniger, je weniger steil die  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{H}$ -Kurve ist und je steiler die Gerade  $P'M$  ansteigt.

Zur Herstellung kräftiger, stabiler permanenter Magnete muß also ein Material genommen werden, das eine große Remanenz  $OR$ , eine große Koerzitivkraft  $C$  und eine möglichst große reversible Permeabilität  $\mu_r$  hat. Auf die letzte Eigenschaft wird man noch am liebsten verzichten, zumal da durch dieselbe ein kleines störendes Feld eine größere, wenn auch reversible, Änderung der Magnetisierung hervorruft.

Um beurteilen zu können, wie die Permeabilität permanenter Magnete sich bei verschiedenen starken Magnetisierungen verhält, sind in Fig. 17 einige absteigende Hysteresisäste ge-

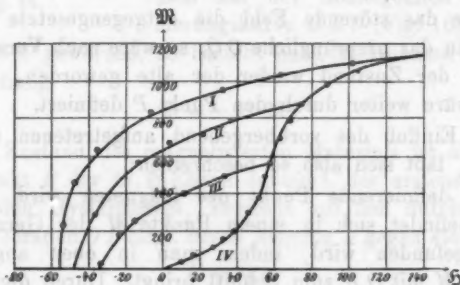


Fig. 17.

zeichnet, die sich durch verschieden hohe Scheitel (so heißt der Punkt der jungfräulichen Kurve, in dem man den Magnetisierungssinn gewechselt hat) unterscheiden. Man erhält die verschiedenen möglichen Magnetisierungen eines Magneten, wenn man je nach der Form desselben eine Gerade durch den Nullpunkt legt, deren Neigung  $\alpha$  gegen die  $\mathfrak{M}$ -Achse durch die Beziehung  $N = \tan \alpha$  gegeben ist. Die  $\mathfrak{M}$ -Achse selbst z. B. entspricht einem Magneten ohne Entmagnetisierung,

d. h. einem sehr langen, dünnen Magneten oder einem geschlossenen Ring, je gedrungener aber die Form, bzw. je größer die Schlitzweite bei einem Ringe ist; um so stärker ist die Linie  $N = \text{const.}$  gegen die  $\mathfrak{M}$ -Achse geneigt

Ferner sind in Fig. 18 für dieselben drei absteigenden Äste die reversiblen Permeabilitäten gezeichnet. In dieser Figur kann man noch die Kurven  $N = \text{const.}$  eintragen. Das ist geschehen für die speziellen Werte  $N = 0$  und  $N = \infty$ , alle anderen liegen dazwischen. Die Permeabilität eines permanenten Magneten ist, wie wir einsehen, von der Stärke der Magnetisierung unabhängig, wenn die Linien  $N = \text{const.}$  der Abszissenachse parallel sind. Bei unserer harten Stahlsorte ist das nun keineswegs genau der Fall, aber die Schwankungen von  $\mu$ , sind nicht sehr groß. Bei den in der ersten Mitteilung untersuchten Materialien war eine bessere Konstanz zu beobachten, doch galt bei der damals benutzten Methode das Resultat nur für den Magneten der bestimmten Form, während wir jetzt in der Lage sind, mit Hilfe von Figg. 17 und 18, für einen Magneten von beliebigem Entmagnetisierungskoeffizienten und beliebig kräftiger Magnetisierung die Permeabilität zu bestimmen.

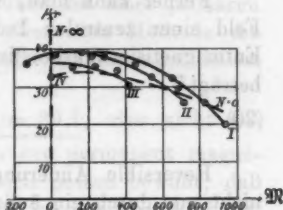


Fig. 18.

Die Resultate dieses Paragraphen wollen wir noch auf die Theorie des geschlitzten permanent magnetisierten Kreises anwenden.<sup>1)</sup>

Es mögen sich zwei halbkreisförmige Stahlstücke, wie in Fig. 19 angedeutet ist, gegenüber liegen. Um diesen geschlitzten magnetischen Kreis sei ein Solenoid gewickelt, mit dessen Hilfe man nach der obigen Methode den Kreis permanent magnetisieren kann. Für eine zentrale Induktionsröhre wird die Streuung zu vernachlässigen sein, da die Randpartien als



Fig. 19.

1) Vgl. auch R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus. Leipzig 1908. p. 63.

Schutzring wirken, und es gilt für das Feld  $\mathfrak{H}_a$  im Schlitz die Gleichung

$$(19) \quad \mathfrak{H}_a = \frac{4\pi \mathfrak{M}_w \frac{l_i}{\mu_r}}{\frac{l_i}{\mu_r} + l_a},$$

wo  $l_i$  die Länge der zentralen Induktionsröhre im Innern des Stahles,  $l_a$  ihre Länge im Interferrikum bedeutet.<sup>1)</sup>

Ferner kann man, wenn man sich auf das gleichförmige Feld einer zentralen Induktionsröhre beschränkt, von einem Entmagnetisierungskoeffizienten der Anordnung sprechen, er beträgt<sup>2)</sup>

$$(20) \quad N = \frac{4\pi l_a}{l_i + l_a}.$$

Reversible Änderungen der Induktion lassen sich nun nicht nur durch ein äußeres Zusatzfeld, etwa einen schwachen Strom im Solenoid, sondern auch durch Veränderung von  $N$  hervorrufen, indem man die Schlitzweite  $l_a$  variiert. Dabei dreht sich die Gerade  $OL$  (Fig. 16) um  $O$  nach den Gleichungen (18) und (20), und der Zustand ist durch den Schnittpunkt von  $OL$  mit  $PM$  bestimmt, d. h. es muß nach (19)

$$(21) \quad \mathfrak{H}_a = \frac{C}{a + l_a}$$

sein, wo  $C$  und  $a$  Konstanten sind. Daß diese Beziehung tatsächlich besteht, oder anders ausgedrückt, daß die magnetomotorische Kraft eines permanent magnetischen Kreises bei Veränderung der Schlitzweite konstant bleibt, ist durch die Messungen von R. H. Weber<sup>3)</sup> und in weiterem Umfange durch die von E. Kempken<sup>4)</sup> gezeigt worden. Neuerdings hat P. Gehne<sup>5)</sup> erfreulicherweise auch die Gültigkeit der Gleichung (21) — und zwar in noch weiteren Grenzen als Kempken — dargetan.

1) Vgl. R. Gans, l. c. p. 63 Formel (87).

2) Vgl. R. Gans, l. c. p. 38 Formel (65).

3) R. H. Weber, Ann. d. Phys. 16. p. 178. 1905.

4) E. Kempken, Tübinger Diss. 1906 und Ann. d. Phys. 20. p. 1017. 1906.

5) P. Gehne, Hallenser Diss. 1908.

Aus  $a$  in Gleichung (21) kann man nun  $\mu_r$  berechnen, denn durch Vergleich von (19) und (21) folgt

$$(22) \quad \mu_r = \frac{l}{a}.$$

Gehne tut dies und findet<sup>1)</sup>  $\mu_r = 154$ .

Andererseits bestimmt Gehne die reversible Permeabilität auf elektromagnetischem Wege, indem er den magnetischen Kreis mit einer sekundären und darüber mit einer primären Wickelung umgibt und nach der ballistischen Methode die Änderung des Induktionsflusses beobachtet, die durch ein kleines Zusatzfeld im Magneten auftritt.

Auf diese Weise ergibt sich  $\mu_r = 29,1$ , also nicht annähernd dasselbe Resultat wie nach der permanent magnetischen Methode. Gehne selbst ist sich dessen bewußt, daß die elektromagnetische Messung nicht ganz einwandfrei ist, denn wenn auch die Halbringe fest aneinander gepreßt waren, so ist erstens doch noch eine Streuung vorhanden und zweitens der Entmagnetisierungskoeffizient keineswegs Null.<sup>2)</sup> Der Fehler, der durch diese Vernachlässigungen auftritt, wird von Gehne auf höchstens 100% geschätzt, so daß dann noch die bedeutende Abweichung zwischen 58 und 154 bestehen bleibt.

Da die Vernachlässigungen des Hrn. Gehne sich durch eine zweckentsprechende Versuchsanordnung vermeiden lassen, habe ich es unternommen, auf beide Methoden  $\mu_r$  zu messen.

Ich benutzte dazu die großen gehärteten Stahlhalbringe, mit denen Hr. Kempken im Tübinger physikalischen Institut gearbeitet hatte. Da dieselben im Laufe der Zeit sich etwas verzogen hatten, so wurden die Stirnflächen aufs neue eben geschliffen.

Der Durchmesser der Stirnflächen betrug 5 cm. Die Halbringe wurden mit einer Primärwicklung von einer Lage versehen, und zwar jeder mit 131 Windungen, so daß im ganzen  $Z = 262$  Windungen den magnetischen Kreis umgaben.

1) P. Gehne, l. c. p. 53.

2) Vgl. J. A. Ewing, Induktion in Eisen und verwandten Metallen, deutsch von L. Holborn und St. Lindeck, Berlin u. München 1892. p. 263.



Der Durchmesser der zentralen Induktionsröhre betrug 17,18 cm, also ihre Länge im Ferromagnetikum  $l_1 = 53,96$  cm.

Die Halbringe wurden ähnlich montiert, wie Hr. Kempken es getan hat, und erst dann durch einen kräftigen Strom in der Primärwicklung magnetisiert, weil Wert darauf gelegt wurde, daß die zentrale Induktionsröhre dauernd ungestört bliebe und nicht etwa in den zentralen Partien dadurch vorübergehend eine größere Streuung entstände, daß der eine bereits magnetisierte Halbring beim Montieren weiter vom anderen entfernt würde.

Durch abwechselndes Vergrößern und Verkleinern der Spaltbreite wurde die Reversibilität der späteren Änderungen gewährleistet. Es ergab sich beim Herausziehen einer flachen Induktionsspule von 6 mm Durchmesser aus dem einen Spalte

Spaltbreite	Ausschlag	
	beobachtet	berechnet
0,420 cm	211,8	211,8
0,460 „	202,0	202,1
0,500 „	193,0	193,3
0,540 „	185,4	185,2
0,580 „	177,9	177,7
0,620 „	170,9	170,8

$l_a$  ist das Doppelte der in der ersten Kolonne stehenden Zahlen, da die Summe beider Spaltbreiten als  $l_a$  zu rechnen ist.

Der „berechnete“ Ausschlag  $e$  ergibt sich nach (21) aus der Formel

$$e = \frac{A}{a + l_a},$$

wo

$$a = 0,8312 \text{ cm},$$

$$A = 354$$

ist. Es wird also nach (22)

$$\mu_r = \frac{53,96}{0,8312} = 64,95.$$

Bei der elektromagnetischen Messung der reversiblen Permeabilität wurde dieselbe Meßspule von 6 mm Durchmesser in den Spalt von 0,246 cm Breite gebracht, so daß nur



die zentralen Induktionsröhren durch die Spule hindurchtraten. Um jeden Spalt wurden noch je zwei Windungen gelegt, damit auch die Spalte von Windungen umgeben waren und so das Solenoid möglichst vollständig war, damit  $\oint_0$  nach der Formel  $4\pi Zi/(l_i + l_a)$  ausgerechnet werden konnte.  $Z$  betrug  $262 + 4 = 266$ ; ferner war  $l_i + l_a = 53,96 + 2 \cdot 0,246 = 54,45$ .

Die Windungsfläche der Spule war zu  $Q = 9,803 \text{ cm}^2$  bestimmt, indem sie aus dem bekannten Felde eines magnetischen Etalons plötzlich herausgezogen wurde<sup>1)</sup>, und der hierdurch entstehende Ausschlag an einem ballistischen Galvanometer beobachtet wurde, das mit Hilfe eines Normals der gegenseitigen Induktion von Siemens & Halske geeicht war.

Es ergab sich beim Kommutieren von

0,0984 Amp. ein Ausschlag 22,25 S.T.

0,1484 " " " 33,92

also beim Kommutieren von 0,1 Amp. = 0,01 C.G.S. ein Ausschlag 22,73 S.T.

Kommutierte man in der Primärspule der wechselseitigen Induktion von 0,00990 Henry einen Strom von  $2,208 \cdot 10^{-4}$  Amp., so erhielt man einen Ausschlag von 26,36 S.T.

Es ist also, wenn  $\gamma$  die ballistische Galvanometerkonstante bezeichnet

$$\Delta \mathfrak{B} \cdot Q = \gamma \cdot 22,73; \quad Q = 9,803.$$

Die Galvanometereichung ergibt

$$2 \cdot 0,00990 \cdot 10^9 \cdot 2,208 \cdot 10^{-5} = \gamma \cdot 26,36,$$

$$\Delta \oint_0 = 2 \cdot \frac{4\pi \cdot 0,01 \cdot 266}{54,45}.$$

Also

$$\frac{\Delta \mathfrak{B}}{\Delta \oint_0} = 31,33.$$

Die Entmagnetisierung wird berücksichtigt, indem man nach Formel (16) rechnet, wo  $N$  durch (20) gegeben ist, und zwar ist

$$\frac{N}{4\pi} = \frac{0,492}{54,45} = 0,009036.$$

1) Vgl. R. Gans, Phys. Zeitschr. S. p. 523. 1907. Diese magnetischen Etalons, über die ich demnächst noch eingehender berichten werde, sind von der Firma M. Th. Edelmann & Sohn, München, zu beziehen.

Daraus findet man

$$\mu_r = \frac{48}{45} = 43,3.$$

Auch nach unserer einwandfreieren Methode ergeben sich also die beiden verschiedenen Resultate 43,3 und 65,0. Die Abweichungen liegen im selben Sinne wie bei Gehne, sind aber lange nicht so groß wie bei ihm. Trotzdem sind sie keineswegs durch Beobachtungsfehler zu erklären.

Man steht also vor der Alternative, anzunehmen, daß die oben entwickelte Theorie der reversiblen Permeabilität nicht vollständig ist, daß es also einen Unterschied für die Induktionsänderung macht, ob man ein Zusatzfeld bei konstantem  $N$  erzeugt, oder ob man dasselbe Zusatzfeld bei konstantem  $\mathfrak{H}_0 = 0$  durch Veränderung von  $N$  hervorruft, oder es liegt die Möglichkeit vor, daß Feld und Induktion im magnetischen Kreise nach der einfachen Formel (19) nicht streng genug berechnet werden. Letzteres scheint mir plausibler, doch möchte ich auf diese Frage erst eingehender zurückkommen, wenn ich die transversale reversible Permeabilität studiert habe und im Besitze einer genaueren Formel für das Feld in einem geschlitzten Kreise bin. Solange das nicht der Fall ist, halte ich die scheinbare Abweichung von 33 Proz. nicht für tatsächlich sichergestellt.

#### § 6. Ponderomotorische Kräfte auf Ferromagnetika.

Infolge der Hysteresis ist man nicht in der Lage gewesen, aus den Maxwellschen Gleichungen eine Formel für die ponderomotorische Kraftwirkung auf ferromagnetische Körper abzuleiten. Trotzdem hat man vielfach die Maxwellsche Formel für den magnetischen Druck — ohne irgendwelche theoretische Begründung — auf Ferromagnetika angewendet, ja du Bois<sup>1)</sup> hat sogar auf Grund dieser Maxwellschen Formel einen Apparat zur Bestimmung der Magnetisierungskurve, die Duboissche Wage, konstruiert. Allerdings ist im du Bois'schen Laboratorium die Formel für den Maxwellschen Druck experimentell bestätigt worden.<sup>2)</sup> Diese Untersuchungen, sowie

1) H. du Bois, Zeitschr. f. Instrumentenk. 20. p. 113 u. 129. 1900.

2) Taylor Jones, Wied. Ann. 54. p. 641. 1895; 57. p. 258. 1896.

die Übereinstimmung der mit der du Bois'schen Wage aufgenommenen Magnetisierungskurven mit den nach der magnetometrischen Methode bestimmten sind Beweise für das Kraftgesetz bei ferromagnetischen Körpern, seine Gültigkeit ist also experimentell, aber nicht theoretisch gezeigt.

Es dürfte daher von Interesse sein, eine theoretische Ableitung für die Formel der ponderomotorischen Kraft zu geben, die auch auf ferromagnetische Körper anwendbar ist.

#### Die Maxwell'schen Gleichungen

$$(23) \quad c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = s \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi \mathfrak{J},$$

$$(24) \quad -c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

haben allgemeine Gültigkeit.

Multipliziert man (23) skalar mit  $\mathfrak{E}/4\pi$ , (24) mit  $\mathfrak{H}/4\pi$  und addiert, so erhält man

$$(25) \quad \frac{-c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \frac{\partial}{\partial t} \frac{s}{8\pi} \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{E} + \frac{1}{4\pi} \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

In dieser Formel ist bekanntlich  $c/4\pi [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$  der Poynting'sche Strahlungsvektor,  $s/8\pi \mathfrak{E}^2$  die elektrische Energie der Volumeinheit,  $\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{E}$  der Überschuß der in der Volumeinheit eines Leiters pro Zeiteinheit entwickelten Jouleschen Wärme über die von den Elementen gelieferte chemisch-thermische Energie.

Sind die magnetischen Änderungen reversibel, so ist, da  $\mathfrak{B} = \mu_r \mathfrak{H} + 4\pi \mathfrak{M}_w$  ist

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \mu_r \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t},$$

also

$$\frac{\mathfrak{H}}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu_r}{8\pi} \mathfrak{H}^2;$$

d. h.

$$(26) \quad w_m = \frac{\mu_r}{8\pi} \mathfrak{H}^2 + w_0$$

ist als magnetische Energie der Volumeinheit aufzufassen; die Größe  $w_0$  ist eine uns unbekannte Funktion der Koordinaten, die auch von dem Parameter  $\mathfrak{M}_w$  abhängen kann, der ja bei reversiblen Änderungen konstant bleibt, so daß also auch  $w_0$  bei

reversiblen zeitlichen Änderungen konstant bleibt. Eventuell ist  $w_m$  die Summe der magnetischen Energie und der reversiblen Wärme, die bei magnetischen Prozessen entwickelt wird, doch wissen wir nichts von der Existenz solcher Wärmevergänge.

Die magnetische Energie eines beliebigen Raumes  $S$  ist nach (26)

$$(27) \quad W_m = \int_S \frac{\mu_r}{8\pi} \mathfrak{S}^2 dS + \int w_0 dS.$$

Die Änderung der magnetischen Energie durch irgend eine virtuelle Verschiebung ist nun maßgebend für die Arbeit der magnetischen Kräfte bei reversiblen Veränderungen der Lage und des magnetischen Zustandes; diese Änderung besteht aber nach (27) aus zwei Teilen, erstens aus der Größe

$$\delta \int \frac{\mu_r}{8\pi} \mathfrak{S}^2 dS,$$

welche genau dieselben Kräfte gibt wie für paramagnetische (aber nicht ferromagnetische) Medien, wenn man nur die reversible Permeabilität anstatt der gewöhnlichen Permeabilität paramagnetischer Körper in die Formeln einführt.

Dazu kommt aber noch die Größe

$$\delta \int w_0 dS,$$

d. h. wir sollen die Differenz der Größe  $\int w_0 dS$  eines materiellen Raumes nach und vor einer virtuellen Verschiebung bilden.

Nun kann sich bei beliebigen Deformationen die Größe des betrachteten Raumes ändern, wodurch der Beitrag  $\int w_0 \delta dS$  entsteht; diese Größe können wir nicht ermitteln, da  $w_0$  uns unbekannt ist. Ferner aber kommt noch das Glied  $\int \delta w_0 dS$  hinzu. Da nun  $w_0$  bei reversiblen Verschiebungen an der Materie haftet, so ändert sich  $w_0$  an einem bestimmten Orte des Raumes nur insofern, als Materie von einer benachbarten Stelle dorthin kommt. Hat die Verschiebung die Komponenten  $\delta \mathfrak{s}_x, \delta \mathfrak{s}_y, \delta \mathfrak{s}_z$ , so ist

$$(28) \quad \delta w_0 = - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \mathfrak{s}_x + \frac{\partial w_0}{\partial y} \delta \mathfrak{s}_y + \frac{\partial w_0}{\partial z} \delta \mathfrak{s}_z \right).$$

Verschiebt sich das Ferromagnetikum als starrer Körper, d. h. sehen wir ab von den Deformationen, die im Ferromagnetikum auftreten können, so ist

$$(29) \quad \begin{cases} \delta x = \delta u_x + z \delta \vartheta_y - y \delta \vartheta_z, \\ \delta y = \delta u_y + x \delta \vartheta_z - z \delta \vartheta_x, \\ \delta z = \delta u_z + y \delta \vartheta_x - x \delta \vartheta_y, \end{cases}$$

wenn  $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$  die Komponenten einer virtuellen Translation des ganzen Körpers,  $\delta \vartheta_x, \delta \vartheta_y, \delta \vartheta_z$  die Komponenten einer virtuellen Drehung bedeuten.

Substituiert man (29) in (28), so wird

$$(30) \quad \begin{cases} \int \delta w_0 dS = -\delta u_x \int \frac{\partial w_0}{\partial x} dS - \delta u_y \int \frac{\partial w_0}{\partial y} dS \\ \quad - \delta u_z \int \frac{\partial w_0}{\partial z} dS \\ \quad - \delta \vartheta_x \int \left( y \frac{\partial w_0}{\partial z} - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) dS \\ \quad - \delta \vartheta_y \int \left( z \frac{\partial w_0}{\partial x} - x \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) dS \\ \quad - \delta \vartheta_z \int \left( x \frac{\partial w_0}{\partial y} - y \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) dS. \end{cases}$$

Durch partielle Integration ergibt sich aus der rechten Seite von (30) eine Summe von Oberflächenintegralen, die über eine Fläche zu erstrecken sind, die den betrachteten Körper unmittelbar umgibt. Außerhalb des Ferromagnetikums ist aber  $w_0 = 0$ , also ist

$$(31) \quad \int \delta w_0 dS = 0.$$

Da für die Verschiebungen starrer Körper ferner  $\delta dS = 0$  gilt, so ist schließlich

$$(32) \quad \delta \int w_0 dS = 0,$$

also nach (27)

$$(33) \quad \delta W_m = \delta \int \frac{\mu_r}{8\pi} \mathfrak{S}^2 dS.$$

Verzichten wir auf die Kenntnis der Spannungen in ferromagnetischen Körpern, so lassen sich die Gesamtkräfte (Translationskräfte und Drehmomente) auf starre ferromagnetische Körper ebenso ausdrücken wie bei paramagnetischen Körpern.

Es ist aber bekannt<sup>1)</sup>, daß diese sich so berechnen lassen, als ob auf jede Volumeinheit die Kraft

$$(34) \quad \varrho_0 \mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H}$$

wirkt, wo  $\varrho_0 = (1/4\pi) \operatorname{div} \mathfrak{H}$  die freie magnetische Dichte bedeutet, und aus (34) folgt unter anderem auch die Form der Kraft, die als Maxwellsche Spannungsformel bekannt ist.

Allerdings ist hier eine Voraussetzung gemacht, nämlich daß die reversible Permeabilität, die für Feldänderungen in Richtung des vorhandenen Feldes in Betracht kommt, die von mir sogenannte reversible *longitudinale* Permeabilität, denselben Wert hat wie diejenige Permeabilität, die für Feldänderungen senkrecht zur Richtung des vorhandenen Feldes gilt, und die ich transversale reversible Permeabilität nennen möchte.

Diese Voraussetzung ist, wie ich in einer folgenden Mitteilung zeigen werde, nicht erfüllt, sondern das Ferromagnetikum wird infolge des ursprünglichen Feldes für Änderungen desselben magnetisch anisotrop. Wir werden dann auch auf die Modifikationen zurückkommen, die an den jetzigen Überlegungen angebracht werden müssen.

Zunächst sollte nur gezeigt werden, daß die Maxwellsche Formel für den Zug in Richtung der Induktionslinien auch für Ferromagnetika richtig bleibt, und daß also die Theorie der du Bois'schen Wage sicher begründet werden kann.

## § 7. Energieumsetzungen in Ferromagnetika.

Im vorigen Paragraphen haben wir uns nur mit unendlich kleinen Verschiebungen und Änderungen des magnetischen Zustandes beschäftigt, weil das für die Ermittlung der ponderomotorischen Kräfte ausreicht.

Jetzt wollen wir auch endliche Variationen betrachten; dabei werden aber unsere Überlegungen nicht zwingende Beweise sein, sie sollen aber wegen des möglichen heuristischen Wertes nicht unterdrückt werden, da sie eventuell eine Richtlinie für anzustellende Experimente abgeben könnten.

1) Vgl. z. B. R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus, p. 77. Leipzig 1908.

Aus den Figg. 10—15 geht hervor, daß  $\mu_r$  keineswegs eine eindeutige Funktion von  $\mathfrak{H}$  ist, sondern als Funktion dieser Größe kräftig von der Vorgeschichte abhängt. Dagegen ist der Einfluß der Vorgeschichte sehr viel unbedeutender, wenn man  $\mu_r$  als Funktion von  $\mathfrak{M}$  betrachtet.

Diese beobachtete schwache Abhängigkeit von der Vorgeschichte ist nun zwar nicht auf Beobachtungsfehler zurückzuführen, aber wenn man annimmt, daß diese Abweichungen nicht in der Natur der Sache begründet, sondern durch sekundäre Störungen bedingt sind, so kommt man zu folgenden Plausibilitätsschlüssen.

Nach Formel (2'') ist

$$(2'') \quad \mathfrak{M} = \kappa_r (\mathfrak{H} + \mathfrak{H}_i')$$

oder

$$(35) \quad \mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{M}}{\kappa_r} - \mathfrak{H}_i',$$

also

$$(36) \quad \mathfrak{H} d\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}}{\kappa_r} d\mathfrak{M} - \mathfrak{H}_i' d\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}}{\kappa_r} d\mathfrak{M} - d(\mathfrak{H}_i' \mathfrak{M}) + \mathfrak{M} d\mathfrak{H}_i'$$

oder, wenn wir aus (35) den Wert von  $\mathfrak{H}_i'$  in den zweiten Term rechts von (36) einsetzen,

$$(37) \quad \mathfrak{H} d\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}}{\kappa_r} d\mathfrak{M} - d\left(\frac{\mathfrak{M}^2}{\kappa_r} - \mathfrak{H} \mathfrak{M}\right) + \mathfrak{M} d\mathfrak{H}_i',$$

und da

$$\frac{\mathfrak{M}}{\kappa_r} d\mathfrak{M} = d\frac{\mathfrak{M}^2}{\kappa_r} - \mathfrak{M} d\frac{\mathfrak{M}}{\kappa_r}$$

ist,

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H} \frac{d\mathfrak{M}}{4\pi} &= \mathfrak{H} d\mathfrak{M} + \frac{1}{4\pi} \mathfrak{H} d\mathfrak{H} = \frac{d\mathfrak{H}^2}{8\pi} \\ &\quad - \mathfrak{M} d\frac{\mathfrak{M}}{\kappa_r} + d(\mathfrak{H} \mathfrak{M}) + \mathfrak{M} d\mathfrak{H}_i'. \end{aligned} \right.$$

Wenn  $\mathfrak{H}_i'$  konstant bleibt, ist alles reversibel. Die einfachste Annahme, die man machen kann, ist die, daß

$$(39) \quad dq = \mathfrak{M} d\mathfrak{H}_i'$$

die irreversible Hysteresiswärme ist, die bei Änderungen von  $\mathfrak{H}_i'$  in der Volumeinheit auftritt. Dann müßte die magnetische Energie der Volumeinheit, falls keine reversiblen Wärmevorgänge beim Magnetisieren auftreten,

$$(40) \quad w_m = \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} + \mathfrak{H} \mathfrak{M} - \int_0^{\mathfrak{M}/\kappa_r} \mathfrak{M} \cdot d\frac{\mathfrak{M}}{\kappa_r}$$



sein, eine Funktion, die nur vom augenblicklichen Zustande abhängt.

Ganz ähnlich liegt die Frage, wenn in Strenge  $\mu_r$  eine eindeutige Funktion von  $\mathfrak{B}$  ist. Ob diese oder die frühere Vermutung eher der Wirklichkeit entspricht, läßt sich experimentell wohl nur sehr schwer entscheiden, da  $\mathfrak{B}$  immer (außer bei ganz kleinen Feldstärken) sehr genähert gleich  $4\pi\mathfrak{M}$  ist.

Im zuletzt angenommenen Falle ist nach (2')

$$(41) \quad \mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}}{\mu_r} - \mathfrak{H}_i,$$

also

$$(42) \quad \mathfrak{H} \frac{d\mathfrak{B}}{4\pi} = d \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{B}}{4\pi} - \frac{\mathfrak{B} d\mathfrak{H}}{4\pi} = d \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{B}}{4\pi} - \frac{\mathfrak{B}}{4\pi} d \frac{\mathfrak{B}}{\mu_r} + \frac{\mathfrak{B} d\mathfrak{H}_i}{4\pi},$$

und es wäre in diesem Falle zu vermuten, daß

$$(43) \quad d\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{B} d\mathfrak{H}_i}{4\pi}$$

und

$$(44) \quad w_m = \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{B}}{4\pi} - \int_0^{\mathfrak{B}/\mu_r} \frac{\mathfrak{B}}{4\pi} \cdot d \frac{\mathfrak{B}}{\mu_r}$$

ist.

Selbstverständlich enthalten die Formeln (39) und (40) bzw. (43) und (44) als Spezialfall das Warburgsche Gesetz, das für einen vollständigen Kreisprozeß

$$\int \mathfrak{H} \frac{d\mathfrak{B}}{4\pi} = \int \mathfrak{H} d\mathfrak{M}$$

als Hysteresiswärme angibt, da  $w_m$  am Ende eines Kreisprozesses denselben Wert hat, wie am Anfang.

#### § 8. Die Duhem-Cisottische Theorie der Hysteresis.

Cisotti<sup>1)</sup> hat kürzlich eine phänomenologische Theorie der Magnetisierungskurve abgeleitet und von Ewing beobachtete Hysteresisschleifen darzustellen gesucht, indem er die experimentell gegebene Koerzitivkraft und Remanenz annahm.

Die Grundlage seiner Rechnungen bildete dabei die von Duhem<sup>2)</sup> aufgestellte „Fundamentalgleichung der magnetischen Hysteresis“.

1) U. Cisotti, Rend. r. acc. dei Lincei (5a) 17. p. 413. 1908.

2) P. Duhem, Mém. de l'Ac. royale de la Belgique (mém. couronné et mém. des savants étrangers) 54. p. 53. 1896.



Diese lautet folgendermaßen: Befindet man sich in irgend einem Punkte der  $\mathcal{M}, \mathcal{S}$ -Ebene, und ändert man bei konstanter Temperatur  $\mathcal{S}$  um  $d\mathcal{S}$ , so tritt eine Änderung  $d\mathcal{M}$  ein, die aus der Gleichung

$$(45) \quad d\mathcal{S} = G(\mathcal{M}) d\mathcal{M} + f(\mathcal{M}, \mathcal{S}) |d\mathcal{M}|$$

sich berechnet, d. h. wenn  $d\mathcal{S}$ , und somit  $d\mathcal{M}$  positiv ist, gilt

$$(46_1) \quad d\mathcal{S} = \{G(\mathcal{M}) + f(\mathcal{M}, \mathcal{S})\} d\mathcal{M},$$

sind dieselben negativ, so hat man

$$(46_2) \quad d\mathcal{S} = \{G(\mathcal{M}) - f(\mathcal{M}, \mathcal{S})\} d\mathcal{M}.$$

Cisotti nimmt sogar spezieller an, daß  $G(\mathcal{M})$  gleich einer Konstanten  $k$  ist. Wäre der Körper vollkommen weich, so müßte  $f = 0$  sein.

Diese von Cisotti benutzte Duhemsche Hypothese scheint nun im Widerspruch mit meinen Beobachtungen zu sein. Denn wenn man auf der jungfräulichen Kurve z. B. von  $O$  bis zum Punkte  $P$  vorgeschritten ist, so müßte nach (46<sub>1</sub>) der Wert

$$(40) \quad \frac{d\mathcal{S}}{d\mathcal{M}} = G(\mathcal{M}) + f(\mathcal{M}, \mathcal{S})$$

sein, wenn man von  $P$  nach  $P'$  weiterginge; ebenfalls müßte aber ein Fortschreiten von  $P''$  nach  $P$  dasselbe  $d\mathcal{S}/d\mathcal{M}$

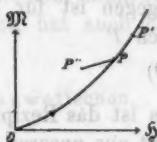


Fig. 20.

ergeben, denn diese Werte könnten sich nur deshalb unterscheiden, weil die Argumente  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{S}$  der Funktionen  $G$  und  $f$  in  $P''$  und  $P$  etwas voneinander verschieden wären. Machte man also die Größe  $d\mathcal{S}$  hinreichend klein, so könnte kein merklicher Unterschied zwischen den beiden soeben erwähnten Werten von  $d\mathcal{S}/d\mathcal{M}$  sein. Dagegen müßte nach Duhem die Größe

$$\frac{d\mathcal{S}}{d\mathcal{M}} = G(\mathcal{M}) - f(\mathcal{M}, \mathcal{S})$$

also wesentlich vom obigen Werte verschieden sein, wenn man von  $P$  nach  $P''$  fortschritte. Die Summe beider  $d\mathcal{S}/d\mathcal{M}$ -Werte müßte nach Duhem gleich  $2G(\mathcal{M})$ , also eine reine Funktion von  $\mathcal{M}$ , nach Cisotti sogar unabhängig vom Punkte der  $\mathcal{M}, \mathcal{S}$ -Ebene, gleich einer Konstanten  $2k$  sein.

Nach meinen Beobachtungen dagegen sind die  $d\mathfrak{H}/d\mathfrak{M}$ -Werte, die man beim Fortschreiten von  $P$  nach  $P''$  und von  $P''$  nach  $P$  erhält, merklich gleich (etwaige Unterschiede können nur ganz minimal sein), diese Änderungen sind also reversibel, dagegen ist  $d\mathfrak{H}/d\mathfrak{M}$  beim Vorrücken von  $P$  nach  $P'$  größer, weil hier noch eine irreversible Änderung hinzukommt.

Die wirklich beobachteten Erscheinungen werden wohl viel besser durch die Gleichung

$$(47) \quad d\mathfrak{H} = G \cdot d\mathfrak{M} - f \cdot d\mathfrak{M}$$

dargestellt, wo  $f$  eine positive Funktion ist, falls das Inkrement  $d\mathfrak{H}$  im selben Sinne erfolgt als das Vorrücken vorher, dagegen Null, falls die Richtung die entgegengesetzte ist. Für das Vorrücken von  $P$  nach  $P'$  gilt also

$$(48) \quad \frac{d\mathfrak{H}}{d\mathfrak{M}} = G - f.$$

Das ist das Reziproke der differentiellen Suszeptibilität, wie man sie als Tangente der Magnetisierungskurve konstruiert; dagegen ist für ein Vorrücken von  $P$  nach  $P''$  oder von  $P''$  nach  $P$

$$(49) \quad \frac{d\mathfrak{H}}{d\mathfrak{M}} = G,$$

das ist das Reziproke der reversiblen Suszeptibilität, und zwar folgt aus unseren Kurven, Figg. 10, 12 und 14, daß  $G$  genähert eine reine Funktion von  $\mathfrak{M}$  ist.

Da also die Grundlage der Cisottischen Rechnungen nicht mit der Erfahrung übereinstimmt, wird wohl sein angenäherter Anschluß an die Beobachtungen durch weitere Hypothesen erreicht sein, die noch der Korrektur bedürfen.

Die demnächst erscheinende dritte Mitteilung soll der transversalen Permeabilität gewidmet sein.

Tübingen, Physik. Institut, 2. Juli 1908.

(Eingegangen 9. Juli 1908.)

## 2. Die Ausbreitung

### *ebener elektromagnetischer Wellen längs eines geschichteten Leiters, besonders in den Fällen der drahtlosen Telegraphie;* von F. Hack.

In einer unlängst veröffentlichten Arbeit<sup>1)</sup>: „Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und deren Beziehung zur drahtlosen Telegraphie“ hat Hr. Zenneck die Frage aufgeworfen, in welcher Weise die Wellen der drahtlosen Telegraphie dadurch beeinflußt werden, daß der Untergrund aus zwei Schichten besteht, die hinsichtlich des Leitvermögens und der Dielektrizitätskonstante erheblich voneinander verschieden sind. Im Einverständnis mit Hrn. Zenneck habe ich die Durchführung der Untersuchung übernommen; Hr. Zenneck hat auch die Ergebnisse einer Durchsicht unterzogen.

#### I. Berechnung der Feldgrößen aus den Maxwell'schen Gleichungen.

Die angenommene Lage des Koordinatensystems entspricht der Fig. 1; die ebene Welle bewege sich in der Richtung der

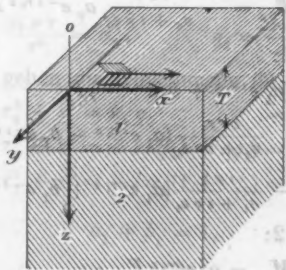


Fig. 1.

1) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 23. p. 846f. 1907. Die Kenntnis dieser Abhandlung wird im folgenden vorausgesetzt und die Abhandlung mit l. c. zitiert.

zunehmenden  $x$ ; in den Bezeichnungen seien Luft, obere und untere Erdschicht durch die Marken 0, 1, 2 unterschieden. Die Bedeutung der Buchstaben ist, wie bei Zenneck, l. c. p. 846:

$E$  = elektrische Feldintensität,

$M$  = magnetische Feldintensität,

$\epsilon$  = Dielektrizitätskonstante,

$\mu$  = Permeabilität =  $\mu_0 = \frac{1}{4\pi}$  im C.G.S.-System,

$\sigma$  = Leitvermögen,

$\nu = \pi \cdot$  Wechselzahl,

$i = \sqrt{-1}$ ,

$\epsilon = \frac{1}{4\pi}$  im C.G.S.-System.

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden auch hier die Maxwell'schen Gleichungen in der bei Zenneck angegebenen Form. Nimmt man für den Leiter 1 in der  $z$ -Richtung das Vorhandensein einer hinlaufenden und einer reflektierten Welle an und führt noch die Funktion

$$(1) \quad F = e^{i(\nu t + \epsilon x)}$$

ein, so ergibt die Integration der Maxwell'schen Gleichungen folgende Werte der Feldgrößen:

Schicht 0 (Luft):

$$(2) \quad \begin{cases} M_{0y} = a_0 e^{-i\nu_0 z} F, \\ E_{0z} = -\frac{i\nu r_0}{\sigma_0 + i\nu \epsilon_0} a_0 e^{-i\nu_0 z} F, \\ E_{0x} = -\frac{i\nu s}{\sigma_0 + i\nu \epsilon_0} a_0 e^{-i\nu_0 z} F; \end{cases}$$

obere Erdschicht 1:

$$(3) \quad \begin{cases} M_{1y} = (a_1 e^{i\nu_1 z} + b_1 e^{-i\nu_1 z}) F, \\ E_{1z} = \frac{i\nu r_1}{\sigma_1 + i\nu \epsilon_1} (a_1 e^{i\nu_1 z} - b_1 e^{-i\nu_1 z}) F, \\ E_{1x} = -\frac{i\nu s}{\sigma_1 + i\nu \epsilon_1} (a_1 e^{i\nu_1 z} + b_1 e^{-i\nu_1 z}) F; \end{cases}$$

untere Erdschicht 2:

$$(4) \quad \begin{cases} M_{2y} = a_2 e^{i\nu_2 z} F, \\ E_{2z} = \frac{i\nu r_2}{\sigma_2 + i\nu \epsilon_2} a_2 e^{i\nu_2 z} F, \\ E_{2x} = -\frac{i\nu s}{\sigma_2 + i\nu \epsilon_2} a_2 e^{i\nu_2 z} F. \end{cases}$$

Die übrigen Komponenten der Feldstärke,  $E_y$ ,  $M_x$  und  $M_z$ , verschwinden in allen drei Medien.

Die in den Gleichungen (1) bis (4) auftretenden Größen sind nun folgendermaßen voneinander abhängig.

Zwischen  $r_0$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  und  $s$  bestehen die Beziehungen:

$$(5) \quad \begin{cases} r_0^2 + s^2 = -\frac{\epsilon \nu \mu (\sigma_0 + \epsilon \nu \epsilon_0)}{v^2}, \\ r_1^2 + s^2 = -\frac{\epsilon \nu \mu (\sigma_1 + \epsilon \nu \epsilon_1)}{v^2}, \\ r_2^2 + s^2 = -\frac{\epsilon \nu \mu (\sigma_2 + \epsilon \nu \epsilon_2)}{v^2}. \end{cases}$$

Hierzu treten noch die Grenzbedingungen, wobei unter  $T$  die Tiefe der Zwischenschicht 1 verstanden ist:

$$(6) \quad \begin{cases} a_0 = a_1 + b_1, \\ \frac{a_0 r_0}{\sigma_0 + \epsilon \nu \epsilon_0} = - (a_1 - b_1) \frac{r_1}{\sigma_1 + \epsilon \nu \epsilon_1}; \\ a_1 e^{\epsilon \nu r_1 T} + b_1 e^{-\epsilon \nu r_1 T} = a_2 e^{\epsilon \nu r_2 T}, \\ \frac{r_1}{\sigma_1 + \epsilon \nu \epsilon_1} (a_1 e^{\epsilon \nu r_1 T} - b_1 e^{-\epsilon \nu r_1 T}) = a_2 \frac{r_2}{\sigma_2 + \epsilon \nu \epsilon_2} e^{\epsilon \nu r_2 T}. \end{cases}$$

Wir führen nunmehr die folgenden Vereinfachungen und Abkürzungen ein:

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma_0 = 0, & a_0 = 1, \\ \frac{\sigma_0 \mu \nu}{v^2} = \alpha_0 = 0, & q_0 = \frac{\nu \epsilon_0}{\sigma_1}, \\ \frac{\sigma_1 \mu \nu}{v^2} = \alpha_1, & q_1 = \frac{\nu \epsilon_1}{\sigma_1}, \\ \frac{\sigma_2 \mu \nu}{v^2} = \alpha_2, & q_2 = \frac{\nu \epsilon_2}{\sigma_2}. \end{cases}$$

Demzufolge gehen die Gleichungen (5) und (6) über in:

$$(8) \quad \begin{cases} r_0^2 + s^2 = \alpha_1 q_0 = A_0, \\ r_1^2 + s^2 = -\epsilon \alpha_1 (1 + q_1) = A_1, \\ r_2^2 + s^2 = -\epsilon \alpha_2 (1 + q_2) = A_2; \end{cases}$$

sowie:

$$(9) \quad \begin{cases} a_1 + b_1 = 1, \\ (a_1 - b_1) r_1 \frac{\epsilon q_0}{1 + \epsilon q_1} = -r_0, \\ a_2 e^{\epsilon \nu r_2 T} = a_1 e^{\epsilon \nu r_1 T} + b_1 e^{-\epsilon \nu r_1 T}, \\ \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{1 + \epsilon q_1}{1 + \epsilon q_2} a_2 e^{\epsilon \nu r_2 T} = a_1 e^{\epsilon \nu r_1 T} - b_1 e^{-\epsilon \nu r_1 T}. \end{cases}$$

Eliminiert man zwischen den vier Gleichungen (9) die Größen  $a_1, b_1, a_2$ , so erhält man die für die Lösung der Aufgabe entscheidende Beziehung zwischen  $r_0, r_1, r_2$  oder gemäß (8) eine Bestimmungsgleichung für die eine Unbekannte  $s^2$ .

Setzt man:

$$(10) \quad C_0 = \frac{1 + i q_1}{q_0}, \quad C_2 = \frac{i \sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{1 + i q_1}{1 + i q_2},$$

so ergibt die Ausführung der Rechnung:

$$\frac{r_1 (C_0 r_0 + C_2 r_2)}{r_1^2 - C_0 C_2 r_0 r_2} = -\operatorname{tg}(r_1 T).$$

Ist nun:

$$(11) \quad r_0 = \operatorname{arctg} \frac{C_0 r_0}{r_1}, \quad r_2 = \operatorname{arctg} \frac{C_2 r_2}{r_1},$$

so erhält man die sehr einfache Beziehung:

$$(12) \quad \underline{r_0 + r_2 + r_1 T = 0}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung könnte durch ein Vielfaches von  $\pi$  ersetzt werden; für die numerische Auflösung der Gleichung ist dies belanglos.

Ist  $|r_1 T|$  so klein, daß innerhalb der Genauigkeitsstufe der Rechnung  $\operatorname{tg}(r_1 T)$  durch  $r_1 T$  ersetzt werden darf, so tritt an die Stelle der transzendenten Gleichung (12) die algebraische Gleichung:

$$(13) \quad \underline{C_0 r_0 + C_2 r_2 = T(C_0 C_2 r_0 r_2 - r_1^2)};$$

diese läßt sich auch unmittelbar aus (9) ableiten, wenn man dort die Näherungswerte:

$$e^{i r_1 T} = 1 + i r_1 T, \quad e^{-i r_1 T} = 1 - i r_1 T$$

einführt.

Bei geeigneten numerischen Werten von  $C_0, C_2$  und den in  $r_0, r_1, r_2$  enthaltenen Konstanten  $A_0, A_1, A_2$  ist auch (13) noch weiterer Vereinfachung fähig. Bezüglich der Vorzeichen ist zu beachten, daß das Vorzeichen von  $r_1$  unbestimmt bleibt;  $r_0$  und  $r_2$  sind beide mit positivem imaginären Anteil zu wählen; denn nur so verschwindet  $e^{-i r_0 z}$  für  $z = -\infty$ ,  $e^{i r_0 z}$  für  $z = +\infty$ .

Endlich geben wir noch die aus (9) und (10) folgenden Werte an, welche der Quotient

$$(14) \quad \Phi(z) = \frac{a_1 e^{i r_2 z} - b_1 e^{-i r_1 z}}{a_1 e^{i r_2 z} + b_1 e^{-i r_1 z}}$$

an der oberen und unteren Grenze des Mediums 1 annimmt:

$$(15) \quad \Phi(0) = i \frac{C_0 r_0}{r_1}, \quad \Phi(T) = -i \frac{C_2 r_2}{r_1}. \quad (81)$$

## II. Anwendung auf den Fall der nassen Obersicht.

Zunächst mögen die vorstehenden Gleichungen auf den Fall angewendet werden, daß Medium 1 eine von Regenwasser durchfeuchtete Erdschicht von geringer Tiefe ist, Medium 2 aus trockenem Boden besteht.

Eine ungefähre Abschätzung zeigt, daß unter dieser Annahme in (13) das Glied  $T r_1^2$  mindestens für die erste Annäherung vernachlässigt werden kann; die Glieder  $C_0 r_0$  und  $C_2 r_2$  werden im allgemeinen von gleicher Größenordnung sein. Bei hinreichend kleinem Wert von  $T$  läßt sich dann die Gleichung

$$(16) \quad f(s^2) = C_0 r_0 + C_2 r_2 - T C_0 C_2 r_0 r_2 = 0$$

durch allmähliche Annäherung auflösen, indem man von dem Wert  $T=0$  ausgeht. Die zugehörigen Werte von  $s^2$ ,  $r_0$ ,  $r_2$  sind:

$$(17) \quad \begin{cases} s^2 = \frac{A_0 C_0^2 - A_2 C_2^2}{C_0^2 - C_2^2}, \\ \bar{r}_0 = C_2 \sqrt{\frac{A_2 - A_0}{C_0^2 - C_2^2}}, \quad \bar{r}_2 = -C_0 \sqrt{\frac{A_2 - A_0}{C_0^2 - C_2^2}}. \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht von der Übereinstimmung dieser Werte mit der Formel (7) in der Arbeit von Zenneck.<sup>1)</sup>

Zu weiterer Annäherung benutzen wir das von Newton angegebene Verfahren.<sup>2)</sup> Es ist:

$$f(s^2) = -T C_0 C_2 \bar{r}_0 \bar{r}_2;$$

bezeichnet man ferner Derivierte nach  $s^2$  durch Akzente, so hat man nach (8):

$$r_0 r_0' = r_1 r_1' = r_2 r_2' = -\frac{1}{2}.$$

Somit erhält man aus (16):

$$f'(s^2) = \frac{T C_0 C_2 (\bar{r}_0' + \bar{r}_2') - (C_0 \bar{r}_2 + C_2 \bar{r}_0)}{2 \bar{r}_0 \bar{r}_2};$$

1) l. c. p. 848. Die Werte von  $r_0$  und  $r$  bei Zenneck, Gl. (7), sind zu vertauschen; bei  $s$ ,  $r_0$  und  $r$  müssen die imaginären Anteile positiv ausfallen, woraus sich die Vorzeichen bestimmen.

2) Vgl. z. B. E. Cesàro, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung, deutsch von G. Kowalewaki) p. 453 ff. Leipzig 1904. (94)

also ist die an  $s^2$  anzubringende Verbesserung:

$$(18) \quad \delta = -\frac{f(s^2)}{f'(s^2)} = -\frac{2\bar{r}_0^2 \bar{r}_2^2}{\bar{r}_0^2 + \bar{r}_2^2 - \frac{1}{T} \left( \frac{\bar{r}_0}{C_0} + \frac{\bar{r}_2}{C_2} \right)}.$$

Der so gefundene Wert  $s^2 + \delta$  wird dem genauen, der Gleichung (13) genügenden Wert schon sehr nahe kommen.

Dieses Annäherungsverfahren ist jedoch nur dann brauchbar, wenn in (16) der dritte Term erheblich kleiner ist als die beiden anderen. Trifft dies nicht zu, so setze man:

$$(19) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{T^2} \left( \frac{1}{C_0^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) - (A_0 + A_2), \\ q = -\frac{1}{T^2} \left( \frac{A_0}{C_0^2} + \frac{A_2}{C_2^2} \right) + A_0 A_2, \end{cases}$$

und berechne hieraus die Zahlenwerte von:

$$(20) \quad \begin{cases} p_1 = 2p, \\ p_2 = p^2 + 2q - \frac{4}{T^4 C_0^2 C_2^2}, \\ p_3 = 2pq + \frac{4(A_0 + A_2)}{T^4 C_0^2 C_2^2}, \\ p_4 = q^2 - \frac{4A_0 A_2}{T^4 C_0^2 C_2^2}. \end{cases}$$

Für  $s^2 = u$  hat man dann die biquadratische Gleichung:

$$(21) \quad p(u) = u^4 + p_1 u^3 + p_2 u^2 + p_3 u + p_4 = 0.$$

Eine genäherte Auflösung dieser Gleichung findet man folgendermaßen. Es sei:

$$(22) \quad p_r = \bar{p}_r + \epsilon \bar{q}_r, \quad (r = 1, \dots, 4),$$

sowie:

$$(23) \quad \begin{cases} \bar{p}(u) = u^4 + \bar{p}_1 u^3 + \bar{p}_2 u^2 + \bar{p}_3 u + \bar{p}_4, \\ \bar{q}(u) = \bar{q}_1 u^3 + \bar{q}_2 u^2 + \bar{q}_3 u + \bar{q}_4. \end{cases}$$

Ist ferner:

$$(24) \quad s = -A + \epsilon B, \quad \bar{s} = -\bar{A} + \epsilon \bar{B},$$

so gilt, wie die Durchführung der Untersuchung zeigen wird, sehr nahezu:

$$(25) \quad A = \bar{A} + \frac{6 \times T}{T + 15} 10^{-12};$$

außerdem kann man mit hinreichender Genauigkeit

$$(26) \quad u = A^2 - 2AB\epsilon = m - \epsilon m'$$



setzen. Dann erhält man  $m'$  aus:

$$(27) \quad m' = \frac{\bar{q}(m)}{\bar{p}'(m)},$$

wodurch auch  $B = m'/2 A$  bestimmt ist.

Den auf diese Weise erhaltenen Wert von  $s$  hat man nur noch um einen sehr kleinen Betrag zu verbessern, damit er der Gleichung (13) genügt.

Ist  $s$  dem ungefähren Betrag nach bekannt, so wird man in-  
dessen am einfachsten unmittelbar von (13) ausgehen; nach einigen  
Versuchen erhält man leicht eine hinreichend genaue Lösung.

Der Zahlenrechnung wurden durchweg die Werte:

$$\epsilon_0 = 0,88 \cdot 10^{-23}, \quad k_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = 15, \quad k_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} = 2, \\ \sigma_1 = 10^{-13}, \quad \sigma_2 = 10^{-16}$$

in Einheiten des C.G.S.-Systems zugrunde gelegt, dagegen für  
die Wellenlänge  $\lambda$  und die Tiefe  $T$  des Mediums 1 verschiedene  
Annahmen gemacht:  $\lambda = 300$  m, 600 m, 1000 m, 2000 m;  
 $T$  zwischen 0 und 50 cm.

Die Rechnungsergebnisse für das elektrische Feld sind in  
den Figg. 2—13 dargestellt.

Für  $T = 0$  ist in der Luft eine namentlich bei großen  
Werten von  $\lambda$  nicht unerhebliche Drehfeldkomponente vorhanden  
und die Richtung der größten Amplitude der elektrischen Feld-  
stärke gegen die Normale zur Leiteroberfläche ziemlich stark  
geneigt. Die Durchfeuchtung des Bodens bewirkt ein starkes  
Zurücktreten der Drehfeldkomponente; für  $T = 40$  cm ist auch  
bei  $\lambda = 2000$  m ein nahezu reines Wechselfeld vorhanden; Hand  
in Hand damit geht eine wenn auch geringfügige Abnahme der  
Neigung gegen die Normale der Leiteroberfläche.

In der durch relativ hohes Leitvermögen ausgezeichneten  
Zwischenschicht 1 entsteht ein beinahe vollkommenes Wechsel-  
feld in der Richtung der  $X$ -Achse; die Drehfeldkomponente  
ist außerordentlich gering; man überzeugt sich hiervon leicht  
durch Berechnung der Ausdrücke:

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{E_{1z}}{E_{1x}} \Big|_{z=0} = -\frac{r_1}{s} \Phi(0) = -i \frac{C_0 r_0}{s}, \\ \frac{E_{1z}}{E_{1x}} \Big|_{z=T} = -\frac{r_1}{s} \Phi(T) = i \frac{C_2 r_2}{s}, \end{cases}$$

deren absolute Beträge zwischen  $10^2$  und  $10^3$  liegen.

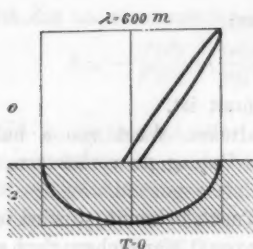


Fig. 2.

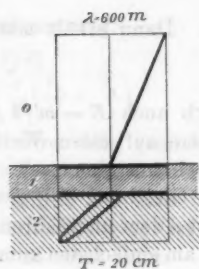


Fig. 3.

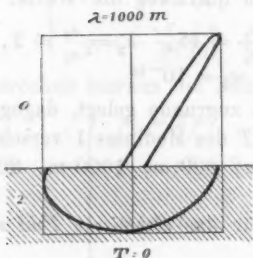


Fig. 4.

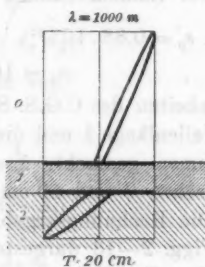


Fig. 5.

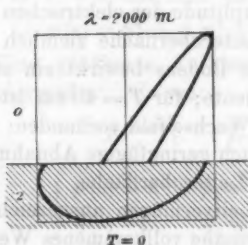


Fig. 7.

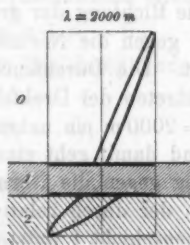


Fig. 8.

Das Verhalten im Medium 2 ist aus den Zeichnungen ersichtlich.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit längs der X-Achse ist, wenn, wie früher,  $s = -A + iB$  gesetzt wird:

$$(29) \quad c_s = \frac{v}{A}.$$

Für kleine Werte von  $T$  ist  $c_s$  nicht unwesentlich größer als die Lichtgeschwindigkeit  $c$ ; mit wachsendem  $T$  nähert sich  $c_s$  der Grenze  $c$  (Fig. 10). Beides rührt im wesentlichen von der Neigung der Strahlungsrichtung gegen die Erdoberfläche her. Solange  $T < 10$  cm ist, nimmt  $c_s$  mit wachsendem  $\lambda$  unbedeutend ab; für größere  $T$  ist der Einfluß von  $\lambda$  unmerklich. Aus Fig. 10 ist auch Gleichung (25) empirisch abgeleitet.

Die Absorption in der Fortpflanzungsrichtung hängt in hohem Grade von  $\lambda$  und  $T$  ab, wie dies in Figg. 11 und 12 dargestellt ist; die Ordinaten geben den Briggschen Logarithmus derjenigen Entfernung  $1/B$  in Kilometern an, in welcher die Amplitude auf  $1/e$  ihres Betrages herabsinkt. Die mit  $F$  bezeichnete gestrichelte Kurve der Fig. 12 zeigt die Größe der Absorption für den Fall, daß das gesamte Erdreich von der Beschaffenheit des Leiters 1 wäre; die Linie  $T = 0$  gilt für durchaus trockenen Boden.

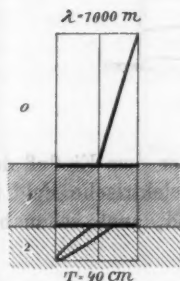


Fig. 6.

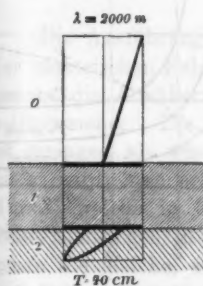


Fig. 9.

In Fig. 13 ist die Absorption beim Eindringen in den Leiter 1 dargestellt; ist  $r_1 = \pm (C + iD)$ , so ist  $1/D$  die Tiefe, in welcher die Amplitude sich auf  $1/e$  ihres Wertes vermindern würde; der Betrag von  $T$  kommt hierbei nicht merklich in Betracht. Bei den hier vorausgesetzten Werten von  $T$  ( $\approx 50$  cm) erfährt also die Amplitude innerhalb des Leiters 1 nur eine ganz geringfügige Veränderung.

Bei dem Fortgang der Wellen durch den Leiter 2 erleidet die Amplitude nochmals eine Verkleinerung; ist  $\lambda = 1000$  m und  $T = 20$  cm, so reduziert sich die Amplitude auf  $1/e$  im Abstand etwa 600 m von der Erdoberfläche; für kleinere Wellenlängen oder größere Werte von  $T$  vermindert sich diese Zahl um einige Prozent.

Aus dem Bisherigen ergibt sich für die Praxis der drahtlosen Telegraphie etwa folgendes: hinsichtlich der Absorption

in der Fortpflanzungsrichtung wirkt die Durchfeuchtung der obersten Erdschicht durchweg günstig, am meisten für Stationen,

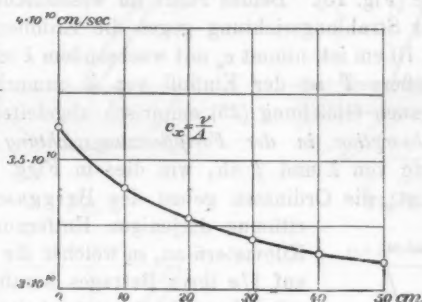


Fig. 10.

die mit kurzen Wellenlängen arbeiten; unter dem Einfluß der Durchfeuchtung gestaltet sich ferner das elektrische Feld in der Luft zu einem fast reinen Wechselfeld, auch schon bei

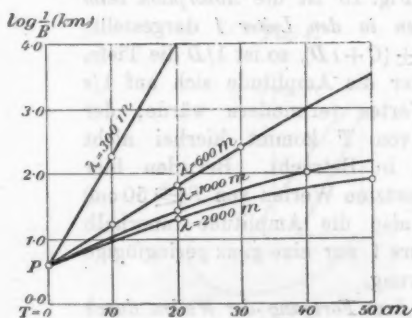


Fig. 11.

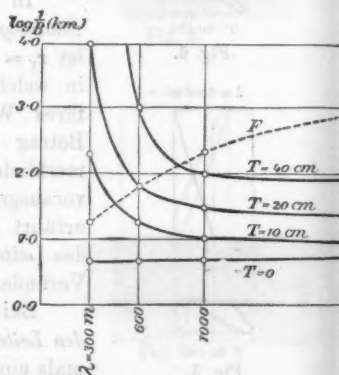


Fig. 12.

geringer Tiefe der durchnäßten Erdschicht; die Neigung der Feldrichtung gegen die Vertikale nimmt dagegen nur un-  
erheblich ab.

Um wenigstens an einem Beispiel den Einfluß einer ver-

änderten Beschaffenheit der Leiter kennen zu lernen, wurde noch der folgende Fall berechnet:

$$\lambda = 1000 \text{ m}, \quad T = 20 \text{ cm}, \quad k_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = 50,$$

$\sigma_1$  und die übrigen Konstanten wie p. 49 angegeben. Diese Zahlen entsprechen etwa der Annahme, daß trockene Erde von einer mäßig tiefen *Schneedecke* überlagert wird; Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit des Schnees sind allerdings innerhalb ziemlich weiter Grenzen willkürlich.

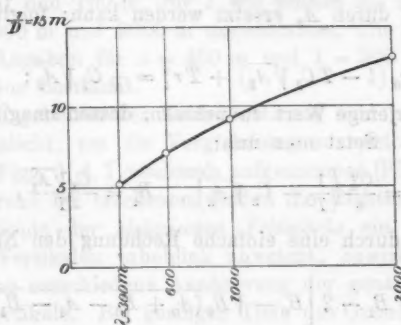


Fig. 13.

Die Ausführung der Rechnung ergab für das Diagramm der elektrischen Feldstärke nahezu wieder das Bild von Fig. 5, nur ist die Annäherung an das Wechselfeld in der Luft noch vollkommener. Die Absorption in der Fortpflanzungsrichtung ist geringer, als wenn die Oberschicht von feuchter Erde gebildet wird; man erhält diesmal für  $\lambda = 1000 \text{ m}$  etwa diejenige Kurve, welche in Fig. 11 dem Wert  $\lambda = 600 \text{ m}$  entspricht. Beim Eindringen in die Leiter 1 und 2 ist die Absorption fast genau die gleiche, wie in den früheren Fällen.

In der Hauptsache gelten also die seitherigen Ergebnisse wenigstens qualitativ auch für den Fall, daß an Stelle der nassen Erdschicht eine Schneedecke tritt.

### III. Anwendung auf den Fall vorhandenen Grundwassers.

Wir gehen nunmehr zu dem Falle über, in welchem sich unter trockenem Boden Grundwasser befindet. Die Tiefe  $T$

der trockenen Schicht wird nicht mehr als 100 m betragen; daß die aus Grundwasser bestehende Schicht nach unten unbegrenzt angenommen wird, ist eine Vereinfachung, deren Zulässigkeit weiter unten geprüft wird.

Um die das Feld bestimmenden Größen zu ermitteln, hat man auch hier die Gleichungen (12) oder (13) aufzulösen; da fast in allen untersuchten Fällen  $|r_1 T| < 1$  ist, so kann (13) als Ausgangspunkt der Annäherung dienen. Dabei findet noch die Besonderheit statt, daß zunächst  $s^2$  gegen  $A_2$  vernachlässigt, also  $r_1^2$  durch  $A_2$  ersetzt werden kann; folglich ergibt sich aus (13):

$$C_0 r_0 (1 - T C_2 \sqrt{A_2}) + T r_1^2 = -C_2 \sqrt{A_2};$$

für  $\sqrt{A_2}$  ist derjenige Wert zu nehmen, dessen imaginärer Anteil positiv ist. Setzt man nun:

$$(30) \quad B_0 = \frac{C_0^2}{4} \left( \frac{1}{T} - C_2 \sqrt{A_2} \right)^2, \quad B_1 = \frac{C_2 \sqrt{A_2}}{T},$$

so findet man durch eine einfache Rechnung den Näherungswert:

$$(31) \quad s^2 = A_1 + B_1 - 2 \left[ B_0 - \sqrt{B_0(A_0 + B_0 - A_1 - B_1)} \right].$$

Die hier auftretende Quadratwurzel ist von  $B_0$  nicht allzusehr verschieden, woraus sich ihr Vorzeichen bestimmt; der bei Anwendung dieser Näherungsformel begangene Fehler beträgt in dem ungünstigsten der durchgerechneten Fälle etwa 13 Proz. Ist  $|B_0|$  hinreichend groß gegen  $|A_1 + B_1 - A_0|$ , so erhält man durch Reihenentwicklung aus (31):

$$(32) \quad s^2 = A_0 - \frac{(A_1 + B_1 - A_0)^2}{4 B_0};$$

auch diese Formel gewährt eine befriedigende Genauigkeit, wenn  $\lambda \geq 600$  m,  $T \geq 50$  m ist.

Unter Benutzung des Wertes von  $s^2$  bekommt man unschwer eine genaue Lösung der Gleichung (12); besteht hierbei zwischen den reellen Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  die Beziehung

$$\xi + i\eta = \operatorname{arctg}(a + ib),$$

so findet man zuerst  $\varphi$  und  $\psi$  aus:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2a}{1 - (a^2 + b^2)}, \quad \sin \psi = \frac{2b}{1 + a^2 + b^2},$$

sodann  $\xi$  und  $\eta$ , die letztere Größe mit Hilfe einer Hyperbelfunktion<sup>1)</sup>, aus:

$$\xi = \frac{\varphi}{2}, \quad \operatorname{tg} \eta = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}.$$

Der Rechnung liegen die Zahlen:

$$\epsilon_0 = 0,88 \cdot 10^{-22}, \quad k_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = 2, \quad k_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} = 80,$$

$$\sigma_1 = 10^{-10}, \quad \sigma_2 = 5 \cdot 10^{-14}$$

in Einheiten des C.G.S.-Systems zugrunde; für  $T$  wurden Werte zwischen 0 und 100 m, für  $\lambda$  wie seither die Zahlen 300 m, 600 m, 1000 m und 2000 m angenommen. Die in Fig. 38 enthaltenen Angaben für  $\lambda = 400$  m und  $\lambda = 500$  m sind durch Interpolation bestimmt.

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung sind in Figg. 14—38 veranschaulicht; um die Vergleichung zu erleichtern, wurden auch die Figg. 2, 4, 7 nochmals aufgenommen (Figg. 23, 28, 33).

Während bei trockenem Boden die Richtung, in welcher die Amplitude der *elektrischen Feldstärke* ein Maximum ist, von der Vertikalen erheblich abweicht, bewirkt das Grundwasser eine entschiedene Annäherung der genannten Richtung an die Vertikale. Bei geringer Tiefe des Grundwasserspiegels unter der Erdoberfläche ist die Drehfeldkomponente geringfügig, besonders für größere Wellenlängen; je weiter aber der Grundwasserspiegel von der Erdoberfläche abrückt, desto stärker wird die Drehfeldkomponente und erreicht namentlich bei kürzeren Wellenlängen einen auffallend großen Betrag (Figg. 14—33).

Das Verhalten des Feldes an der oberen Grenze des Leiters 1 bietet nichts besonders Bemerkenswertes; an der unteren Grenze entsteht ein nahezu reines Wechselfeld, dessen Richtung von der Vertikalen nicht allzusehr verschieden ist; man vergleiche hierzu Fig. 34, welche ziemlich gleichmäßig für alle in Betracht kommenden Werte von  $T$  und  $\lambda$  gilt; je größer  $\lambda$ , desto geringer ist die Drehfeldkomponente.

In dem Leiter 2 entsteht ein nahezu horizontal gerichtetes Wechselfeld; in den berechneten Fällen liegt  $|E_x/E_z|$  etwa zwischen 10 und 25; das Grundwasser spielt also hier eine ähnliche Rolle, wie in dem früher behandelten Falle die nasse Oberschicht.

1) W. Ligowski, Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen, Berlin 1889.

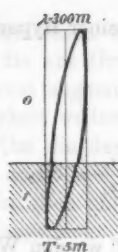


Fig. 14.

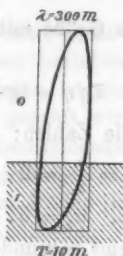


Fig. 15.

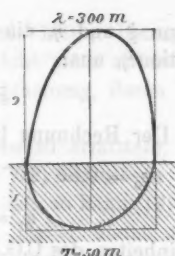


Fig. 16.

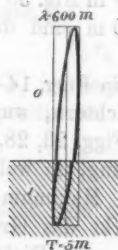


Fig. 19.

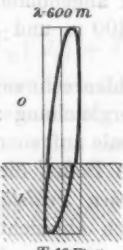


Fig. 20.

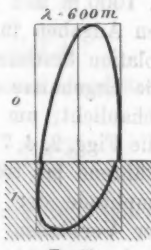


Fig. 21.

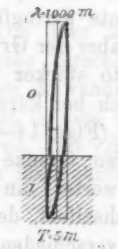


Fig. 24.

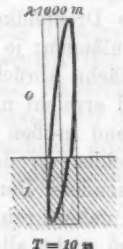


Fig. 25.

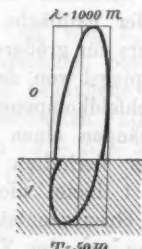


Fig. 26.



Fig. 29.



Fig. 80.

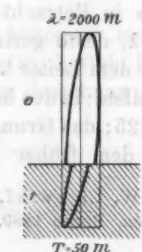


Fig. 31.



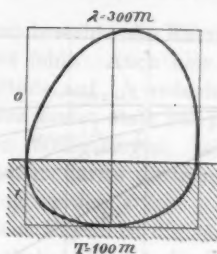


Fig. 17.

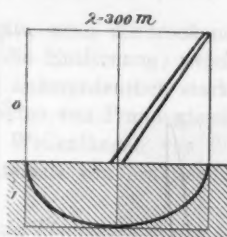


Fig. 18.

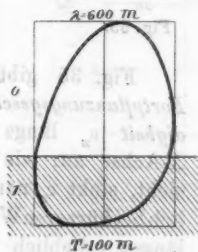


Fig. 22.

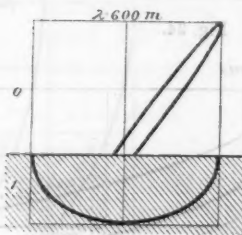


Fig. 23.



Fig. 27.

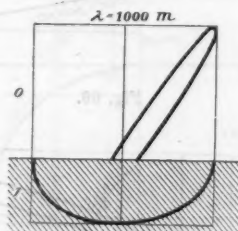


Fig. 28.

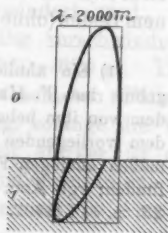


Fig. 32.

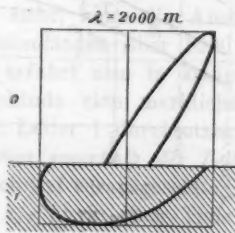


Fig. 33.

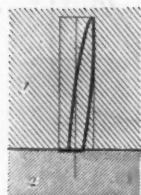


Fig. 34.

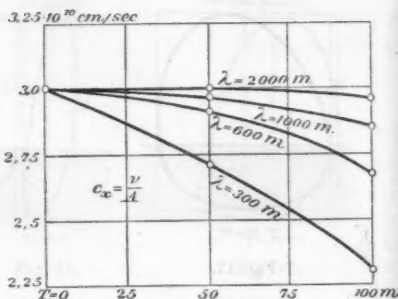


Fig. 35.

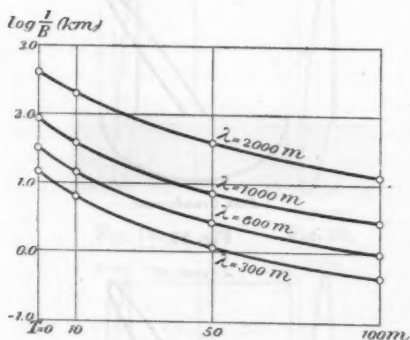


Fig. 36.

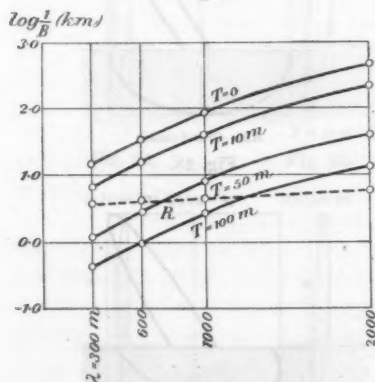


Fig. 37.

Fig. 35 gibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c_x$  längs der X-Achse an; wie man sieht, sinkt  $c_x$  namentlich bei kürzeren Wellenlängen erheblich unter den Betrag der Lichtgeschwindigkeit herab.<sup>1)</sup>

Die Absorption in der Fortpflanzungsrichtung ist in Figg. 36 und 37 wiedergegeben; in Fig. 37 bedeutet die mit  $R$  bezeichnete gestrichelte Linie den Betrag der Absorption für den Fall, daß das Erdreich nur aus trockenem Boden (ohne Grund-

1) Ein ähnliches Ergebnis hat F. Harms in dem von ihm behandelten, dem vorliegenden einigermaßen analogen Falle gefunden; vgl. Ann. d. Phys. 23. p. 44 f. 1907.

wasser) besteht; die Kurve  $T = 0$  gilt, wenn die trockene Erdschicht fehlt. Auch hier ist  $1/B$  die Entfernung, welche die Amplitude auf  $1/e$  reduziert. Eine außerordentlich starke Absorption findet statt bei großen Werten von  $T$  und gleichzeitig kurzen Wellenlängen; bei großen Wellenlängen von 2000 m und mehr dürfte die Absorption niemals von praktischer Bedeutung werden.

Aus Fig. 38 ist die Absorption beim Eindringen in den Leiter 1 ersichtlich;  $1/D$  ist die Tiefe, in welcher die Amplitude auf

$$\frac{1}{D} = 5 \text{ km.}$$

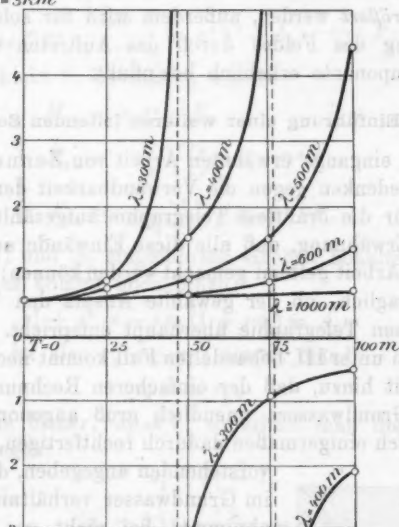


Fig. 38.

$1/e$  vermindert wird. Wie man sieht, kann die Absorption hier völlig verschwinden; bei Wellenlängen über 1000 m ist  $1/D = 550-820$  m. Tatsächlich erfährt also in keinem der hier betrachteten Fälle die Amplitude eine merkliche Veränderung, solange die Wellen den Leiter 1 durchsetzen.

Weit stärker ist die Absorption innerhalb des Leiters 2; beim Eindringen in das als unendlich tief vorausgesetzte Grundwasser nimmt die Amplitude auf  $1/e$  ab in einer Tiefe unter

dem Grundwasserspiegel, welche sich für  $\lambda = 300$  m auf etwa 11 m, für  $\lambda = 2000$  m auf etwa 20 m beläuft; der Wert von  $T$  hat keinen wesentlichen Einfluß.

Für die drahtlose Telegraphie lehren die vorstehenden Betrachtungen hauptsächlich folgendes: die Wirksamkeit der mit langen Wellen arbeitenden großen Stationen wird durch vorhandenes Grundwasser entschieden günstig. beeinflusst, besonders hinsichtlich der Absorption in der Fortpflanzungsrichtung; für Stationen mit kurzen Wellenlängen kann dagegen die Absorption der Wellen durch die Anwesenheit von Grundwasser vergrößert werden, außerdem wird für solche Stationen die Richtung des Feldes durch das Auftreten einer starken Drehfeldkomponente erheblich beeinflusst.

#### IV. Einführung einer weiteren leitenden Schicht.

In der eingangs erwähnten Arbeit von Zenneck sind verschiedene Bedenken gegen die Verwendbarkeit der gewonnenen Resultate für die drahtlose Telegraphie aufgezählt<sup>1)</sup>; es bedarf kaum der Erwähnung, daß alle diese Einwände auch gegen die vorliegende Arbeit geltend gemacht werden können: insbesondere bleibt es fraglich, ob der gewählte Ansatz den Verhältnissen der drahtlosen Telegraphie überhaupt entspricht.

Für den unter III. behandelten Fall kommt noch die weitere Schwierigkeit hinzu, daß der einfacheren Rechnung wegen die Tiefe des Grundwassers unendlich groß angenommen wurde. Dies läßt sich einigermaßen dadurch rechtfertigen, daß, wie im vorstehenden angegeben, die Amplitude im Grundwasser verhältnismäßig rasch abnimmt; bei nicht gar zu geringer Mächtigkeit der Grundwasserschicht dürfte also — von den übrigen Bedenken abgesehen — immerhin eine für die Praxis genügende Annäherung an die Wirklichkeit erzielt sein.

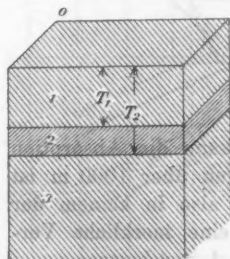


Fig. 39.

Es liegt nahe, dem Übelstand dadurch abzuhelpen, daß man eine endliche Mächtigkeit der Grundwasser-

1) J. Zenneck, l. c. p. 855 f.

schicht annimmt, also das in Fig. 39 dargestellte Schema zugrunde legt: zu oberst Luft (0), dann zwischen eine begrenzte (1) und eine nach unten unbegrenzte (3) Schicht trockenen Erdreichs eingeschlossen eine Grundwasserschicht (2) von der Mächtigkeit  $T_2 - T_1$ .

Zu den Gleichungen (1) bis (3) treten die folgenden:

Schicht 2 (Grundwasser):

$$(33) \quad \begin{cases} M_{2y} = (a_2 e^{i r_2 z} + b_2 e^{-i r_2 z}) F, \\ E_{2x} = \frac{i v r_2}{\sigma_2 + i v \epsilon_2} (a_2 e^{i r_2 z} - b_2 e^{-i r_2 z}) F, \\ E_{2z} = -\frac{i v s}{\sigma_2 + i v \epsilon_2} (a_2 e^{i r_2 z} + b_2 e^{-i r_2 z}) F; \end{cases}$$

Untere Erdschicht 3, beschaffen wie 1:

$$(34) \quad \begin{cases} M_{3y} = a_3 e^{i r_3 z} F, \\ E_{3x} = \frac{i v r_3}{\sigma_1 + i v \epsilon_1} a_3 e^{i r_3 z} F, \\ E_{3z} = -\frac{i v s}{\sigma_1 + i v \epsilon_1} a_3 e^{i r_3 z} F. \end{cases}$$

Die in (7) und (8) eingeführten Größen behalten ihre Bedeutung bei; es kommt noch hinzu:

$$(35) \quad r_3^2 + s^2 = -i \alpha_1 (1 + i q_1) = A_1.$$

Hiernach ist also  $r_3 = \pm r_1$ ; nimmt man<sup>1)</sup>

$$(36) \quad r_3 = -r_1,$$

und setzt, wie bisher,  $a_0 = 1$ , so erhält man die folgenden Grenzbedingungen:

$$(37) \quad \begin{cases} a_1 + b_1 = 1, \\ (a_1 - b_1) r_1 \frac{i q_0}{1 + i q_1} = -r_0; \\ a_2 e^{i r_2 T_1} + b_2 e^{-i r_2 T_1} = a_1 e^{i r_1 T_1} + b_1 e^{-i r_1 T_1}, \\ (a_2 e^{i r_2 T_1} - b_2 e^{-i r_2 T_1}) \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1 + i q_1}{1 + i q_2} = a_1 e^{i r_1 T_1} - b_1 e^{-i r_1 T_1}; \\ a_3 e^{-i r_1 T_1} = a_2 e^{i r_2 T_1} + b_2 e^{-i r_2 T_1}, \\ -a_3 e^{-i r_1 T_1} \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{1 + i q_2}{1 + i q_1} = a_2 e^{i r_2 T_1} - b_2 e^{-i r_2 T_1}. \end{cases}$$

Haben  $C_0$  und  $C_2$  die seitherige Bedeutung und können die Quadrate von  $|r_1 T_1|$ ,  $|r_2 T_1|$ ,  $|r_2 T_2|$  gegen 1 vernachlässigt

1) Vgl. unten p. 62.

werden, so ergibt sich durch Entwicklung der Exponentialfunktionen:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 = 1, \\ a_1 - b_1 = \epsilon \frac{r_0}{r_1} C_0; \\ a_2 + b_2 + \epsilon r_2 T_1 (a_2 - b_2) = 1 + \epsilon r_1 T_1 (a_1 - b_1), \\ a_2 - b_2 + \epsilon r_2 T_1 (a_2 + b_2) = \frac{\epsilon r_1}{C_2 r_2} (a_1 - b_1 + \epsilon r_1 T_1); \\ a_2 e^{-\epsilon r_1 T_1} = a_2 + b_2 + \epsilon r_2 T_2 (a_2 - b_2), \\ a_2 e^{-\epsilon r_1 T_1} = \frac{\epsilon C_2 r_2}{r_1} [a_2 - b_2 + \epsilon r_2 T_2 (a_2 + b_2)]. \end{array} \right.$$

Setzt man den Wert von  $a_1 - b_1$  in die zwei nächstfolgenden Gleichungen ein und subtrahiert die zwei letzten Gleichungen, so erhält man für  $a_2 + b_2 = \xi$  und  $a_2 - b_2 = \eta$ :

$$\begin{aligned} \xi + \epsilon r_2 T_1 \eta &= 1 - r_0 C_0 T_1, \\ \epsilon r_2^2 C_2 T_1 \xi + r_2 C_2 \eta &= - (r_0 C_0 + r_1^2 T_1), \\ (r_1 + r_2^2 C_2 T_1) \xi + \epsilon r_2 (r_1 T_2 - C_2) \eta &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(39) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & T_1 & 1 - r_0 C_0 T_1 \\ r_2^2 C_2 T_1 & -C_2 & \epsilon (r_0 C_0 + r_1^2 T_1) \\ r_1 + r_2^2 C_2 T_1 & r_1 T_2 - C_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Hätte man in (36)  $r_3 = r_1$  gesetzt, was aber den vorhergehenden, hier nicht aufgenommenen Zahlenrechnungen widersprechen würde, so wäre in (39)  $r_1$  durch  $-r_1$  zu ersetzen.

Nimmt man für Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante die bisherigen Werte, ferner  $T_1 = 10^3$  cm,  $T_2 = 1,1 \cdot 10^3$  cm, also  $T_2 - T_1 = 1$  m an, so läßt sich statt  $\Delta$  die Näherung benutzen:

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & T_1 & 1 \\ r_2^2 C_2 T_1 & -C_2 & \epsilon (r_0 C_0 + r_1^2 T_1) \\ 1 & T_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$(40) \quad \epsilon (r_0 C_0 + r_1^2 T_1) (T_2 - T_1) = C_2 (1 + r_2^2 T_1 T_2).$$

Es bietet keine Schwierigkeit, aus dieser Gleichung die Werte der gesuchten Größen zu berechnen; allein die Resultate

erweisen sich als physikalisch unmöglich, indem z. B.  $r_0$  der p. 46 gegebenen Vorzeichenregel nicht genügt, auch zeigt sich mit wachsendem  $T_2$  keine Annäherung an die früheren Ergebnisse.

Dies rührt davon her, daß der gewählte Ansatz in diesem Falle nicht den Verhältnissen der drahtlosen Telegraphie entspricht: da der Raum ober- und unterhalb der relativ gut leitenden Schicht 2 annähernd gleichwertig ist, so findet Energieströmung in die Schicht 2 von oben und unten statt; bei der drahtlosen Telegraphie hingegen kommt in den Raum 3 nur solche Energie, welche vorher die Schicht 2 durchsetzt hat.

Stuttgart, Juni 1908.

(Eingegangen 14. Juni 1908.)

Vorhandensein von Rissen im Schwingungskreis wird beobachtet. Es ist der vollständige Schwingungskreis bedingt nur aus der

Erklärung. 1. A. Reiche, Z. f. Physik. 1908, p. 190.  
2. M. Wied. Ann. 64, p. 508, 1898.  
3. L. Sebaner, Ann. d. Phys. 22, p. 117, 1907.  
4. J. Neander, Elektrotechn. Zeitschrift, 1908, p. 110.  
Graphie p. 101.

### 3. Über die Abhängigkeit der Permeabilität des Eisens von der Frequenz bei Magnetisierung durch ungedämpfte Schwingungen; von Léon Schames.

#### § 1. Einleitung.

Die Frage nach der Abhängigkeit der Permeabilität von der Frequenz des Wechselfeldes konnte bisher für hohe Frequenzen nur mit Hilfe gedämpfter Schwingungen behandelt werden. Nur in einem ganz kleinen Intervall ist mit ungedämpften Schwingungen an die Frage herangetreten worden; es geschah dies in der Arbeit von Krogh und Rikli<sup>1)</sup>, die bis zu einer Frequenz von 100 kamen, in der Arbeit von M. Wien<sup>2)</sup>, und schließlich in der des Verfassers<sup>3)</sup>, die beide eine Frequenz von 500 erreichten. Das einstimmige Resultat dieser Untersuchungen ist, daß die Werte der Permeabilität mit wachsender Frequenz abnehmen, und die Tendenz zu zeigen scheinen, sich einer Geraden parallel der  $\xi$ -Achse zu nähern. Inwieweit diese Tendenz wirklich vorliegt, wurde bisher, wie schon erwähnt, nur mit gedämpften Schwingungen untersucht. Eine Zusammenstellung dieser Arbeiten finden wir bei Zenneck<sup>4)</sup>. Hiernach wäre die Permeabilität schon bei Frequenzen von  $7 \cdot 10^4$  pro sec (Varley) von der Größenordnung von 100, also gegenüber statischer Magnetisierung auf den 10. Teil reduziert. Bei Schwingungen von  $10^6$  pro sec sind die Werte von derselben Größenordnung, gehen gelegentlich aber um fast noch eine Zehnerpotenz herunter (15,6 Cardani).

Bei den gedämpften Schwingungen bedingt nun aber das Vorhandensein von Eisen im Schwingungskreis weitgehende

1) A. Krogh u. Rikli, Elektrotechn. Zeitschr. p. 1083. 1900.

2) M. Wien, Wied. Ann. 66. p. 859. 1898.

3) L. Schames, Ann. d. Phys. 22. p. 448. 1907.

4) J. Zenneck, Elektromagn. Schwingungen und drahtlose Telegraphie p. 484.



Komplikationen, da die einzelnen Perioden bei jedem Schwingungsimpuls voneinander verschieden werden, wie es auch Battelli und Magri<sup>1)</sup> experimentell nachgewiesen haben. Es folgt daraus, daß die Abhängigkeit der Permeabilität aus den beobachteten Daten sehr kompliziert wird, und daß es daher kaum möglich erscheint, unanfechtbare Werte für die Permeabilität zu erhalten.

## § 2. Verwendung von ungedämpften Schwingungen.

Da die eben angeführten Schwierigkeiten bei ungedämpften Schwingungen wegfallen, so lag es nahe, diese zu verwenden, um die Abhängigkeit der Permeabilität von der Frequenz experimentell zu untersuchen. Durch die Entdeckung Poulsens<sup>2)</sup> ist es ja, wie bekannt, möglich geworden, sehr hohe Frequenzen zu erreichen. Diese in der drahtlosen Telegraphie benutzten Schwingungen weichen jedoch sehr stark von der Sinusform ab, wie es Corbino<sup>3)</sup>, Blondel<sup>4)</sup> und Barkhausen<sup>5)</sup> gezeigt haben; nach letzteren haben wir es mit „Schwingungen II. Art“ zu tun. Die „Schwingungen I. Art“ hingegen sind fast rein sinusförmig. Der prinzipielle Unterschied zwischen diesen

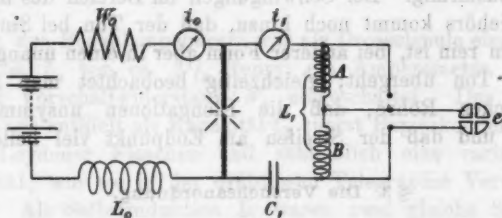


Fig. 1.

beiden Arten liegt darin, daß bei der II. Art der Bogenlampenstrom bei jeder Schwingung einmal erlischt, d. h. also, daß der Maximalwert des Hochfrequenzstromes den Wert des Bogenlampenstromes übersteigt  $i_1 > i_0$  (siehe Fig. 1). Ist hin-

1) A. Battelli u. L. Magri, Physik. Zeitschr. p. 156. 1908.

2) V. Poulsen, Elektrotechn. Zeitschr. 27. p. 1040. 1906.

3) O. M. Corbino, Physik. Ztschr. p. 175. 1905; p. 197 Anm. 1908.

4) A. Blondel, l'Eclairage élect. 44. p. 41 u. 81.

5) H. Barkhausen, Das Problem der Schwingungserzeugung 1907.

gegen  $i_1 < i_0$ , so haben wir es mit Schwingungen I. Art zu tun. Um nun möglichst viel Energie zu bekommen, muß nun andererseits  $i_1$  möglichst groß sein, man müßte also wählen:

$$i_1 = i_0,$$

oder, da wir es mit Sinusstrom zu tun haben:

$$i_1 = \frac{i_0}{\sqrt{2}} \sim 0,7 i_0.$$

Die Kurven bei Blondel zeigen jedoch, daß ein Überschreiten dieses Wertes um ca. 40—50 Proz. gestattet ist, ohne daß die Form merklich von der Sinuslinie abweicht. Ob dies in der Tat der Fall ist, kann bei den hohen Frequenzen nicht mehr mit Hilfe der Braunschen Röhre und des rotierenden Spiegels entschieden werden, denn der Spiegel kann nicht so rasch rotieren, daß er uns die Kurve auseinanderzieht. Jedoch gibt uns die Braunsche Röhre allein ein bequemes Kriterium für die Sinusform der Wellenströme. Erscheint auf dem Fluoreszenzschirm der Streifen gleichmäßig hell und symmetrisch zur Nullage und ist die Ablenkung von derselben Größe wie die entsprechende Gleichstromablenkung, so ist die Schwingung sinusförmig. Bei Schwingungen im Bereich des menschlichen Gehörs kommt noch hinzu, daß der Ton bei Sinusform angenehm rein ist, bei anderer Form aber in einen unangenehm schrillen Ton übergeht; gleichzeitig beobachtet man an der Braunschen Röhre, daß die Elongationen unsymmetrisch werden, und daß der Streifen am Endpunkt viel heller aufleuchtet.

### § 3. Die Versuchsanordnung.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wollen wir zur speziellen Versuchsanordnung übergehen. Als Gleichstromquelle diente eine Akkumulatorenbatterie und zwar wurden Spannungen von 120—460 Volt benutzt. Die Kohlen des Lichtbogens waren 8 mm Homogenkohlen; sie brannten bei Schwingungszahlen bis 20 000 in Luft. Um höhere Schwingungszahlen zu erreichen, wurde zuerst mit einem im abgeschlossenen Raum brennenden Lichtbogen gearbeitet. Die Versuche waren in der Tat befriedigend, hatten jedoch folgenden Übelstand. Da im abgeschlossenen Raum nicht genug Sauerstoff zur Oxydation des Kohlenstoffs vorhanden ist, so bildet

sich Kohlenoxyd. Schaltet man den Bogenstrom aus, und will dann nach Verlauf einer kurzen Zeit wieder einschalten, so entsteht eine dumpfe, zuweilen recht heftige Explosion, dadurch hervorgerufen, daß die an den Dichtungen eintretende Luft mit dem vorhandenen Kohlenoxyd ein explosives Gemisch gebildet hat. Es wurde daher vorgezogen, den Lichtbogen einfach in der Flamme eines Bunsenbrenners übergehen zu lassen, was ja eine analoge Wirkung wie das Einbetten des Lichtbogens in Wasserstoff hat. Man erreicht so leicht Frequenzen bis zu etwa 80 000. Noch höher kommt man, wenn man die Luftzufuhr am Bunsenbrenner abstellt. Es scheiden sich dann allerdings im Lichtbogen leuchtende Zweige aus Rußpartikelchen ab, die, wenn sie zerfallen, leicht Unregelmäßigkeit geben. Es läßt sich jedoch ein genügend starker Gasstrom leicht so regulieren, daß die Rußpartikelchen mitgenommen und in dem oberen Teil der Flamme mehr oder weniger verbrannt werden. Es gelang mir so, Frequenzen von  $2 \cdot 10^5$  zu erreichen, wenn Eisen im Schwingungskreis war. Ohne Eisen und bei genügend kleinen Werten der Selbstinduktion und der Kapazität kommt man leicht auf den 20fachen Betrag.

In den Bogenlampenkreis war als Drosselspule eine Selbstinduktion  $L_0$  von ca.  $3\frac{1}{2}$  Henry, ein Amperemeter und genügend Vorschaltwiderstand  $W_0$  eingeschaltet. Der Schwingungskreis enthielt als Kapazität  $C_1$  zuerst Papierkondensatoren, dann Leydener Flaschen und schließlich eine variable Ölkapazität, wie sie in der drahtlosen Telegraphie Verwendung findet. Als Selbstinduktion  $L_1$  waren zwei gleiche Spulen  $A$  und  $B$  hintereinander geschaltet, von denen die eine das zu untersuchende Eisen enthielt. Ferner befand sich im Schwingungskreis ein Hitzdrahtamperemeter von Hartmann & Braun; dasselbe war von der Frequenz unabhängig, es zeigt bis drei Ampere direkt und hatte für einen Meßbereich bis sechs Ampere als Shunt einen zweiten gleichen Hitzdraht.

#### § 4. Die Konstanten der Spulen und des Eisens.

Die beiden Spulen  $A$  und  $B$  waren, damit sie sich gegenseitig nicht beeinflussen konnten, im Abstand von einem Meter aufgestellt, und zwar die eine horizontal, die andere vertikal.

Es wurden zuerst Spulen von gewöhnlichem Litzendraht gewickelt; diese wurden jedoch bei hohen Schwingungen (etwa von 20 000 an) beträchtlich warm. Es wurden deshalb für höhere Schwingungszahlen Spulen aus Emailliedrahtlitzte benutzt, die sich in der Tat gut bewährten. Die ersten Spulen waren auf Glasröhren von 10 mm Durchmesser gewickelt, und hatten in drei Lagen  $N = 251$  Windungen; ihre Länge  $l$  war 15 cm, ihr mittlerer Querschnitt  $q = 1,68 \text{ cm}^2$ ; nach der Formel  $4\pi Ni/l$  folgt eine Feldstärke  $\mathfrak{H} = 21,05 \text{ i Amp.}$  Der Ohmsche Widerstand dieser Spulen für Gleichstrom betrug 0,20 Ohm. Die zweiten Spulen waren auf Glasröhren von 7,7 mm gewickelt, sie hatten in drei Lagen  $N = 198$  Windungen eine Länge  $l = 15 \text{ cm}$ , einen mittleren Querschnitt  $q = 1,37 \text{ cm}^2$ . Die Feldstärke war  $16,6 \text{ i Amp.}$ , ihr Ohmscher Widerstand 0,275 Ohm. Die Selbstinduktion jeder der ersten Spulen berechnete sich zu  $0,89 \cdot 10^{-4} \text{ Henry}$ , die der zweiten zu  $0,45 \cdot 10^{-4} \text{ Henry}$ . Der Vergleich der Spulen mit einem Selbstinduktionsnormal in der Wheatstoneschen Brücke ergab analoge Werte.

Der zu untersuchende Eisenkörper war natürlich von sehr kleinem Volumen, denn die Schwingungen erster Art geben nicht genug Energie her, um viel Eisen zyklisch zu magnetisieren. Er bestand aus 100 Haardrähten, weichen Eisens von 15 cm Länge, die in einer Glaskapillare von ca.  $1\frac{1}{2} \text{ mm}$  Durchmesser eingeschlossen waren; die einzelnen Drähte waren zwar nicht voneinander isoliert, trotzdem durfte vorausgesetzt werden, daß keine Wirbelströme von einem Draht zum anderen übergehen würden, da die Drähte genügend Raum hatten und nicht aneinander gepreßt waren. Der Durchmesser der einzelnen Drähte betrug 0,0051, cm, der Eisenquerschnitt war also

$$q^1 = 2,06 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2.$$

#### § 5. Die Theorie der Meßmethode.

Die Permeabilität des Eisenbündels läßt sich nun berechnen, wenn wir das Verhältnis des Induktionsflusses in der Spule mit Eisen zu dem in der eisenlosen Spule kennen. Dieses Verhältnis ist jedoch gleich dem Verhältnis der Spannungen an den Enden der Spulen  $A$  und  $B$ , wenn wir diese

Spannungen korrigieren um den Betrag des durch den Ohmschen Widerstand, die Hysteresis und Wirbelströme bedingten Spannungsabfalls. Die so korrigierten Werte seien  $e_A$  und  $e_B$ , dann wird

$$e_B = 2\pi n L_B i,$$

$$L_B = \frac{4\pi N^2 q}{e},$$

$$e_B = 2\pi n \frac{4\pi N^2 q}{e} i.$$

Nun ist

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi Ni}{e}$$

und mithin

$$e_B = 2\pi n N \mathfrak{H} q.$$

Im Eisen ist die Kraftlinienzahl  $\mu q' \mathfrak{H}$ , also wird

$$e_A = 2\pi n N \mathfrak{H} (q + \mu q'),$$

also

$$\frac{e_A}{e_B} = \frac{q + \mu q'}{q} = 1 + \mu \frac{q'}{q}$$

oder

$$(1) \quad \mu = \frac{q}{q'} \left( \frac{e_A}{e_B} - 1 \right).$$

Da  $L_B$  bekannt und konstant ist, so folgt aus  $e_B$  auch die Schwingungszahl

$$(2) \quad n = \frac{e_B}{2\pi L_B i}.$$

Gern hätte ich die so gefundene Schwingungszahl verglichen mit der Zahl, wie sie aus der Dudellschen Formel folgt

$$n = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{2\pi}.$$

Aber die direkte Bestimmung des Ohmschen Widerstandes des Schwingung erregenden Lichtbogens scheint auf unüberwindbare Schwierigkeiten zu stoßen. Deshalb mußte hiervon abgesehen werden. Man kann jedoch, darauf sei hier hingewiesen, den Ohmschen Widerstand gerade aus obiger Formel berechnen, da ja die anderen Größen alle bekannt sind.

## § 6. Ausführung der Messungen und ihre Korrekturen.

Um also die Permeabilität zu bestimmen, mußten die Spannungen an den Enden der Spulen *A* und *B* gemessen werden. Dies geschah bis 25 Volt mit dem Hallwachsschen Elektrometer in Doppelschaltung, von da an wurde ein Multizellulard Voltmeter von Hartmann & Braun benutzt.

Bei den Messungen wurde darauf gesehen, daß  $i_1$  möglichst gleich oder etwas kleiner als  $i_0$  war (§ 2).

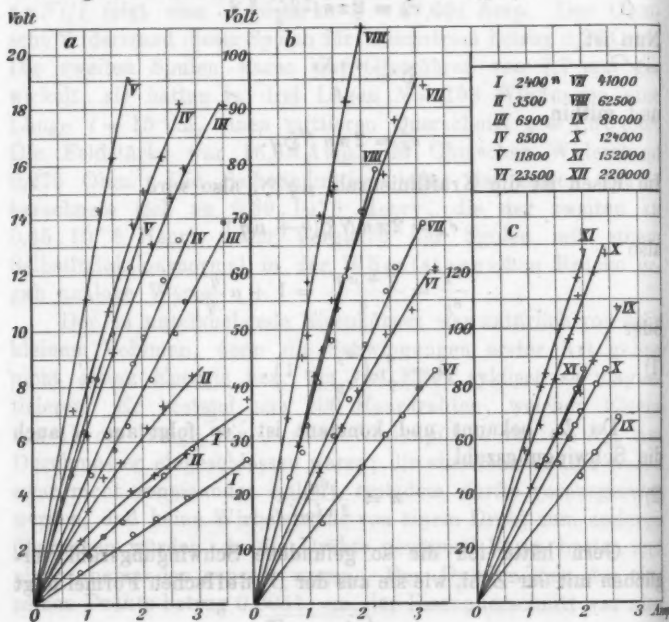


Fig. 2.

In der Fig. 2 sind die Meßresultate wiedergegeben. Die Ordinaten sind die abgelesenen effektiven Spannungen in Volt und zwar bedeuten die Kreise ohne, die Kreuze mit Eisen. Die Abszissen sind die effektiven Stromstärken  $i$  in Amp. Ist die Versuchsreihe bei genau gleichbleibender Schwingungszahl durchgeführt, so müssen die Kurven ohne Eisen gerade sein, wie dies auch die Fig. 2 zeigt.

$a$  und  $b$  sind die Messungen mit den Spulen aus gewöhnlicher Litze,  $c$  mit den Spulen aus Emaildrahtlitze. Wegen des Überganges von dem einen zum anderen Spulensystem wurde eine Kontrollmessung bei  $n = 23\,000$ <sup>1)</sup> aufgenommen, die sehr gut stimmte.

Die Genauigkeit der Messungen ist etwa 3 Proz. Wie wir im vorigen Paragraphen bemerkt haben, müssen die Spannungen eventuell korrigiert werden. Wir führen zu diesem Zweck einen effektiven Widerstand  $R_{\text{eff}}$  ein, dieser mit dem Quadrat der Stromstärke multipliziert gibt uns den gesamten Energieverbrauch pro sec, und zwar wird:

$$i^2 \cdot R_{\text{eff}} = i^2 R + H + W.$$

Hierbei ist  $R$  der Ohmsche Widerstand,  $H$  der Hysteresis-,  $W$  der Wirbelstromverlust pro sec.; also

$$H = \eta \cdot \mathfrak{B}^{1,6} \cdot v \cdot n \cdot 10^{-7} \text{ Watt pro sec}$$

$$W = \left[ \frac{r \cdot n \cdot \mathfrak{B}}{2 \cdot 10^5} \right]^2 \cdot v \text{ Watt pro sec,}$$

wobei wiederum  $\mathfrak{B}$  die maximale Induktion,  $\eta$  den Steinmetz-schen Faktor,  $v$  das Eisenvolumen und  $r$  den Drahtradius bedeutet. Mithin wird:

$$R_{\text{eff}} = R + \frac{H + W}{i^2}.$$

An der Spule mit Eisen sei die abgelesene Spannung  $\varepsilon_a$ . Dann wird:

$$2\pi n L = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_a}{i}\right)^2 - \left(R + \frac{H + W}{i^2}\right)^2}.$$

Rechnen wir diese Korrekturen aus, so zeigt sich, daß sie nur ungefähr – 1 Proz. ausmachen, und mithin zu vernachlässigen sind, nur bei  $n = 220\,000$  wird die Korrektur an der Spannung – 2 Proz. ( $H = 10$ ,  $W = 20$ ).

### § 7. Die Schirmwirkung der Wirbelströme.

Die Wirbelströme bedingen nun aber noch eine andere Erscheinung, die unter dem Namen „Schirmwirkung“ bekannt

1) Es mag hier erwähnt werden, daß dieser Ton für mich nicht mehr hörbar war, während ein Ton bei  $n = 20\,000$  noch deutlich wahrgenommen wurde. Die Energieverhältnisse haben sich beim Übergange von der einen Frequenz zur anderen natürlich nicht geändert.



ist. Es wird nämlich die Amplitude der magnetischen Induktion an der Oberfläche des Drahtes am größten und nimmt nach der Achse zu kontinuierlich ab. Diese Eigenschaft hängt von folgenden Größen ab, Drahtradius, Leitvermögen, Permeabilität und Periodenzahl; und zwar bedingen diese Faktoren nach Zenneck<sup>1)</sup> den Wert einer einzigen charakteristischen Größe  $\alpha$ .

Wir halten uns im folgenden streng an die Ausführungen Zennecks; müssen jedoch überall für  $n$   $2n$  setzen; weil dort  $n$  Wechsel-, hier Periodenzahl bedeutet.

$$\alpha = k \cdot r \sqrt{2n},$$

wo

$$k = \sqrt{\frac{\pi \sigma \mu}{8 v^2}} = 0,4 \text{ nach Tab. IV } ^1)$$

und mithin folgt für

$$n_{\min.} = 2400, \quad \alpha_{\min.} = 0,07$$

und für

$$n_{\max.} = 220000, \quad \alpha_{\max.} = 0,66.$$

Wir haben es hier also immer mit dem II. Grenzfall zu tun, jedoch ist für  $n_{\max.}$  das Verhältnis der Induktion an der Oberfläche zu der in der Achse gleich  $1 + \alpha^2$ , d. h., an der Oberfläche um 20 Proz. größer als in der Achse.

Die Schirmwirkung veranlaßt also, daß der magnetische Widerstand, der für Gleichstrom  $w_m$  betragen habe, wächst und zwar werde er gleich  $\delta_m$ . Die maßgebende Größe ist hier bei Wechselstrommagnetisierung analog wie bei Wechselstromleitung, jedoch nicht der Widerstand, sondern die Impedanz. Sie sei  $\delta_m$ , es ist dann

$$\delta_m = \sqrt{w_m^2 + 2\pi p_m^2},$$

wo  $p_m$  also eine der Selbstinduktion analoge Größe darstellt. Die Erhöhung des Induktionsflusses durch Einführen des Eisens wird dann:

$$G = \mu \frac{1}{\delta_m},$$

d. h. das wirklich vorhandene  $\mu$  ist größer als das hier aus den Beobachtungen folgende und zwar um den Faktor  $\delta_m/w_m$ .

1) J. Zenneck, l. c. p. 203 ff., 992 u. 993.



Diesen Faktor können wir aus der Kurventafel Fig. 2 (Zenneck) ableiten und wir erhalten für unsere Versuchsbedingungen folgende Werte.

Tabelle I.

$n$	$\kappa$	$\frac{\delta_m}{w_m}$
88 000	0,43	1,026
124 000	0,51	1,05
152 000	0,565	1,07
220 000	0,66	1,13

Wenn wir die richtigen Werte der Permeabilität erhalten wollen, so müssen wir sie also wegen der Schirmwirkung korrigieren, und zwar im Maximum um 13 Proz.

#### § 8. Die Abhängigkeit der Permeabilität von Feldstärke und Periodenzahl.

Unter Benutzung obiger Korrekturen erhalten wir aus Fig. 2 die Figg. 3 und 4; die eigentlich beide dasselbe darstellen, aber aus dem Grund wiedergegeben sind, weil Permeabilität, Feldstärke und Periodenzahl als drei miteinander verknüpfte Variable auftreten.

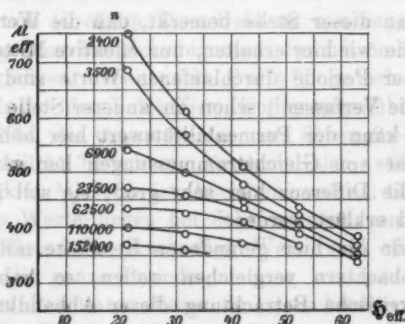


Fig. 3.

Wir sehen aus Fig. 3, daß sich die Kurve mit wachsender Frequenz immer mehr einer Geraden nähern, d. h. die

Permeabilität zeigt das Bestreben, mit höherer Frequenz unabhängig von der Feldstärke zu werden. Aus Fig. 4 sehen wir, daß die Permeabilität, die bei  $n = 2400$  sehr hohe Werte hat, bis etwa  $n = 10000$  sehr schnell abnimmt, von da an nimmt sie sehr langsam und fast linear ab.

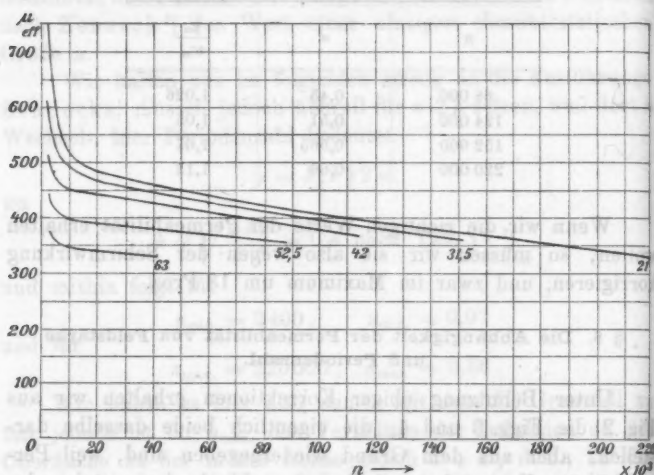


Fig. 4.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die Werte der Permeabilität, die wir hier erhalten, nur effektive Mittelwerte aller während einer Periode durchlaufenen Werte sind, eine Tatsache, auf die Verfasser<sup>1)</sup> schon an anderer Stelle hingewiesen hat. Daher kann der Permeabilitätswert hier höher sein, als wir ihn sonst von Gleichstrommessungen her gewohnt sind. Jedoch ist die Differenz hier sehr groß; sie soll in § 10 besprochen und erklärt werden.

Wenn wir die hier gefundenen Resultate mit denen von anderen Beobachtern vergleichen wollen, so haben wir vor allem eine kritische Betrachtung dieser Abhandlungen nötig, die im folgenden Paragraphen gegeben werden soll.

1) L. Schames, Physik. Zeitschr. 1908, p. 317.

§ 9. Kritik der von anderen Beobachtern gefundenen Resultate.

Während in der vorliegenden Untersuchung das Prinzip der Permeabilitätsbestimmung darin lag, die Erhöhung des Induktionsflusses in einer Spule zu bestimmen, wenn Eisen eingeführt wird, basieren andere auf der Widerstandserhöhung eines Eisendrahtes, wenn derselbe von gedämpften Schwingungen durchströmt wird.

Bei Klemenčič<sup>1)</sup> ist der I. Grenzfall streng verwirklicht, da er mit der extrem hohen Schwingungszahl  $n = 9 \cdot 10^7$  arbeitet. Er findet für weiches Eisen  $\mu = 118$ , für Stahl  $\mu = 115$  und 106. Diese Werte sind unabhängig von der Feldstärke; sie sind, wie die hier gefundenen, zeitliche effektive Mittelwerte über eine ganze Periode.

Auch Zenneck<sup>2)</sup> gibt einen ähnlichen Versuch an, wobei er bei  $n = 4 \cdot 10^6$ ,  $\mu = 211$ , und für  $n = 10^7$ ,  $\mu = 167$  findet.

Zenneck weist allerdings darauf hin, daß hier die durch die Hysteresis bedingte Energievergeudung als Korrektion eingeführt werden müsse; diese kann jedoch nach Meinung des Verfassers vernachlässigt werden, da durch die Magnetisierung im ersten Grenzfalle, mit dem wir es doch bei Zenneck und Klemenčič zu tun haben, nur die Oberfläche des Drahtes beeinflußt wird und die Hysteresis nur in einer ganz dünnen Haut wirken kann.

Eine dritte Methode besteht darin, die Erhöhung der Selbstinduktion in einem Eisendraht zu messen, wenn er von schnellen, gedämpften Schwingungen durchströmt wird. Nach diesem Verfahren arbeitet St. John<sup>3)</sup>, jedoch beträgt der Unterschied, der durch das Eisen Kupfer gegenüber bedingt ist, nur 3—4 Proz. des Gesamtwertes; aus diesen 3—4 Proz. wird die Permeabilität berechnet, sie kann also, selbst wenn die Meßgenauigkeit  $\frac{1}{2}$  Proz. ist, höchstens auf ca. 15 Proz. genau sein. Seine Werte liegen bei Schwingungen von  $n = 5,7 \cdot 10^7$  zwischen 108 und 84. Auch diese Werte sind effektive Mittelwerte über die ganze Periode.

Mit den Resultaten dieser drei verschiedenen Beobachter stimmt unser Resultat hier gut überein, der Permeabilitäts-

1) J. Klemenčič, Wiener Ber. 1894. p. 205.

2) J. Zenneck, l. c. p. 416.

3) C. E. St. John, Phil. Mag. 1894. p. 425; 1895. p. 297.

wert ist hier zwar größer, wir haben aber andererseits auch nicht so hohe Schwingungszahlen erreicht.

Nach einer vierten Methode arbeitet Varley.<sup>1)</sup> Er bestimmt die maximale Induktion von Eisendrähten in einem schnell oszillierenden Feld aus der Größe der Kathodenstrahlenablenkung in der Braunschen Röhre. Er findet, daß die maximale Induktion mit wachsender Frequenz abnimmt (erst sehr rasch, dann langsamer), und daß diese Abnahme geringer ist bei den dünnen als bei den dicken Drähten.

Das letztere Resultat, daß also bei den dünneren Drähten höhere Induktionen erreicht werden, ist ganz selbstverständlich, da die Schirmwirkung geringer als bei den dicken Drähten ist. Aber eben diese Wirkung hat Varley nicht richtig berücksichtigt, denn sie kommt sehr stark in Betracht, da seine Drähte viel zu dick sind. Wir haben es daher nicht mit dem II. allerdings auch nicht mit dem I. Grenzfall zu tun, sondern befinden uns im Intervall zwischen beiden. Wenn Varley sagt, die Induktion ist geringer als bei Gleichstrom, so meint er, der zur Geltung kommende Wert der Induktion ist geringer; aber da die Induktion über den Querschnitt des Drahtes ungleichmäßig verteilt ist, so kann in der Oberfläche ein Wert der Induktion herrschen, der der Gleichstrominduktion gleich, oder sogar noch größer ist.

Rechnen wir für den dünnsten Draht bei Varley ( $r = 0,011$  cm) die Werte von  $\frac{\delta_m}{w_m}$  aus, so erhalten wir analog wie oben Tab. I, folgende Tabelle.

Tabelle II.

$n$	$\mu$	$k$	$x$	$\frac{\delta_m}{w_m}$
8000	200	0,30	0,42	1,026
14000	—	—	0,55	1,06
20000	—	—	0,66	1,13
24000	—	—	0,72	1,18
31000	—	—	0,83	1,30
45000	—	—	1,04	1,59
56000	270	0,33	1,21	1,85
70000	320	0,36	1,47	2,24
80000	380	0,40	1,73	2,67

1) W. M. Varley, Diss. Straßburg 1901.

Während also die Ordinaten bei Varleys Kurven die Ablenkungen der Kathodenstrahlen in Millimetern sind, d. h. also proportional dem zeitlichen Maximalwert, aber dem örtlichen Mittelwert der Induktion, ist in der Fig. 5 die Ordinate

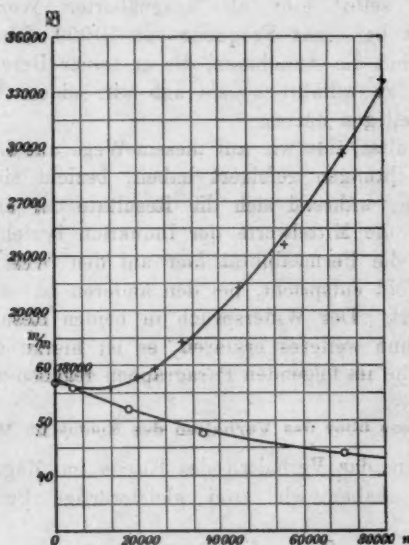


Fig. 5.

gleich dem Maximalwert der Induktion, sowohl in zeitlichem als in örtlichem Sinn genommen. Die Kathodenstrahlenablenkung bei einer Feldstärke von 82 C.G.S. und bei Gleichstrom (57 mm) ist dabei der Induktion von ca. 17000 gleichgesetzt, ein Wert, der bei der betreffenden Feldstärke für verschiedene weiche Eisensorten sehr angenähert gilt.<sup>1)</sup> In Fig. 5 sind die Beobachtungspunkte Varleys als Kreise eingezeichnet, die Kreuze sind die mit Hilfe der Tab. 2 berechneten Werte.

Aus Fig. 5 sehen wir, daß der Maximalwert der Induktion mit wachsender Frequenz sehr stark steigt und solch hohe Werte erreicht, wie wir sie bei Gleichstrom-Magnetisierung

1) F. Kohlrausch, Prakt. Physik, Tab. 37.

und bei Feldstärken von derselben Größenordnung nie kennen gelernt haben. Ebenso wie der Maximalwert der Induktion muß alsdann auch die betreffende Permeabilität sehr stark mit der Frequenz wachsen.

Varley selbst gibt als angenäherten Wert für die Permeabilität bei einer Frequenz von 70000 den Wert 101 an, jedoch sind die Annahmen, die er seiner Berechnung zugrunde legt, zu willkürlich, als daß wir seinem Wert große Bedeutung beilegen dürfen.

Das Resultat, das wir auf diesem Wege aus den Varleyschen Beobachtungen gefolgert haben, bezieht sich auf die Maximalwerte, während sich die Resultate der anderen Beobachter auf die Mittelwerte der Induktion beziehen; analog bezieht sich die Permeabilität hier auf den Wert, der dem maximalen Feld entspricht, bei den anderen ist es der effektive Mittelwert. Der Widerspruch in beiden Resultaten läßt sich nicht ohne weiteres erklären, es ist hierzu eine Hypothese nötig, die im folgenden Paragraphen gegeben werden soll.

#### § 10. Hypothese über das Verhalten des Eisens im Wechselfeld.

Wenn wir das Verhalten des Eisens im Magnetfeld betrachten, so haben wir zwei gleichwertige Bestimmungsgleichungen:

$$\mathfrak{B} = \kappa \cdot \mathfrak{H},$$

$$\mathfrak{B} = \mu \cdot \mathfrak{H} = \mathfrak{H}(1 + 4\pi\kappa).$$

In jeder Gleichung haben wir drei Variable, von denen wir zwei als primäre, die dritte als abgeleitete Größe betrachten können. Es seien nun  $\mathfrak{H}$  und  $\kappa$  bzw.  $\mathfrak{H}$  und  $\mu$  primär,  $\mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{B}$  abgeleitet. Die Feldstärke  $\mathfrak{H}$  ist von der Periodenzahl unabhängig; sie oszilliert zwischen den Maximalwerten, die auch bei Gleichstrom gelten würden und durch die Formel  $\mathfrak{H} = 4\pi Ni/l$  gegeben sind. Die Suszeptibilität  $\kappa$  und die Permeabilität  $\mu$  sind in erster Annäherung proportional; jedenfalls ist ihr beiderseitiges Verhalten während der Magnetisierung durch ein schnelles Wechselfeld ein analoges.

Stellen wir nun die Hypothese auf, daß dieses Verhalten sich aus zwei Eigenschaften herleite: I. Die Permeabilität

(bzw. Suszeptibilität) findet bei schnellem Wechseln nicht genügend Zeit, den Endwert zu erreichen, der ihn sonst bei Gleichstrom- oder langsamer Wechselstrommagnetisierung zukommt. II. Das Maximum der Permeabilität habe die Tendenz, mit steigender Frequenz abzunehmen, wie das aus verschiedenen Versuchsergebnissen<sup>1)</sup> folgt. Als Beispiel wollen wir eine Magnetisierung in den Grenzen  $\mathfrak{H}_{\max.} = \pm 100$  C.G.S. nehmen, und eine Permeabilitätskurve, wie die stark ausgezogene in Fig. 6.

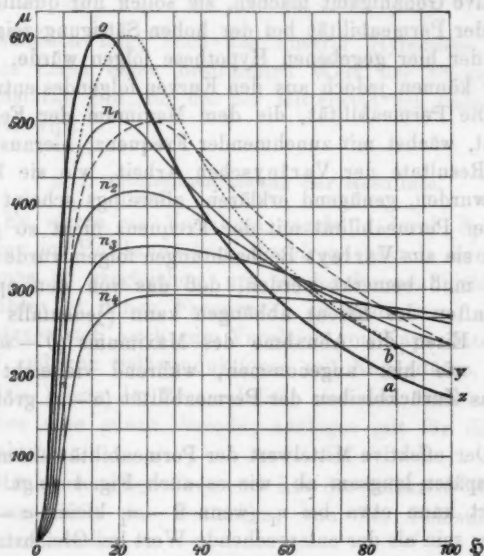


Fig. 6.

Es wird danach  $\bar{\mu} = 175$ , also  $\mathfrak{B} = 1750$ . Bei der Frequenz  $n_1$  erreiche nun die Permeabilität nur den Punkt *a* der Kurve, während die Feldstärke ihren Maximalwert 100 erreicht hat; es ist dann  $\bar{\mu} = 200$ , also  $\mathfrak{B} = 20000$ . Wir würden so die punktierte Kurve erhalten, da aber nach II. gleichzeitig das Maximum niedriger wird, so erhalten wir nicht diese, sondern etwa die ausgezogene Kurve für die Frequenz  $n_1$ . Wächst

1) M. Wien, l. c.; L. Schames, l. c.



die Frequenz auf  $n_2$ , so hat auch diese Kurve schon ihre Gültigkeit verloren, wir müssen sie analog wie die erste Kurve umändern, es wird nicht mehr der Wert  $y$ , sondern der Wert  $b$  erreicht, es folgt so die gestrichelte Kurve und da wieder das Maximum abnehmen muß, folgt für  $n_3$  die ausgezogene Kurve, wobei jetzt  $\mathfrak{B} = 23300$ . Ganz analog finden wir die Kurven für  $n_3$ ,  $n_4$  usw.

Diese Kurven können keinen Anspruch auf irgendwelche quantitative Genauigkeit machen, sie sollen nur qualitativ den Verlauf der Permeabilität bei der hohen Sättigung zeigen, wie er nach der hier gegebenen Hypothese folgen würde.

Wir können jedoch aus den Kurven folgendes entnehmen:

1. Die Permeabilität, die dem Maximum der Feldstärke entspricht, wächst mit zunehmender Frequenz; hieraus können wir die Resultate der Varleyschen Arbeit, wie sie hier berechnet wurden, genügend erklären; allerdings scheint die Zunahme der Permeabilität mit der Frequenz nicht so groß zu sein, wie sie aus Varleys Beobachtungen folgen würde (Fig. 5). Dagegen muß bemerkt werden, daß das von den speziellen Eigenschaften des Eisens abhängen kann (jedenfalls ist bei Varleys Eisen die Abnahme des Maximums ( $0 - n_1$ ) nicht so groß wie hier angenommen, während vielleicht gleichzeitig das Zurückbleiben der Permeabilität ( $a - z$ ) größer sein kann).

2. Der effektive Mittelwert der Permeabilität nimmt zuerst schnell, später langsam ab, wie es auch Fig. 4 zeigt. Dieser Mittelwert kann etwa bei  $n_1$  (wenn  $0 - n_1$  klein,  $a - z$  groß ist) größer sein als der entsprechende Wert bei Gleichstrom, wie wir das auch an Fig. 4 sehen. Hier haben wir für  $\mathfrak{F}_{\text{eff}} = 63$  einen Mittelwert der Permeabilität gleich 380, woraus  $\mathfrak{B}_{\text{eff}} = 24000$  folgt. Dieser Wert, der für Gleichstrom viel zu hoch ist, läßt sich also durch obige Hypothese erklären. Es sei hier bemerkt, daß Verfasser schon früher<sup>1)</sup> höhere Werte der maximalen Induktion fand, ohne dieselben erklären zu können. In der Literatur ist anscheinend nur bei Steinmetz<sup>2)</sup> ein

1) L. Schames, l. c. Fig. 7.

2) C. P. Steinmetz, Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen p. 124.



ähnlicher Hinweis zu finden. Eine dort wiedergegebene Kurve (Fig. 72) zeigt bei  $\xi = 20$ , für Gleichstrom  $\mathfrak{B} = 16000$ , für technischen Wechselstrom hingegen  $\mathfrak{B} = 18000$ , ohne daß diese Differenz erklärt wird.

3. Für sehr hohe Frequenzen hat die Permeabilität das Bestreben, unabhängig von der Feldstärke zu werden, wie auch Fig. 3 zeigt; sie kann bei noch weiterer Steigerung der Frequenz ganz unabhängig werden, wie es Klemenčič gefunden.

Schließlich folgt noch aus unserer Hypothese, daß es für jedes Eisen einen bestimmten Wert der Frequenz und der Feldstärke gibt, für die der Mittelwert der Induktion ein Maximum wird.

#### § 11. Zusammenfassung der Resultate.

1. Es wurde ein Verfahren gegeben, durch Spannungsmessungen im Poulsenschem Hochfrequenzkreis zwei Selbstinduktionen zu vergleichen, um so die Permeabilität dünner Eisendrähte bei hohen Frequenzen zu bestimmen; das Verfahren eignet sich auch zum Vergleich von Kapazitäten untereinander und von Selbstinduktionen mit Kapazitäten.

2. Die Werte der Permeabilität sind nur effektive Mittelwerte über eine ganze Periode; analoges gilt für die Werte der Induktion.

3. Mit wachsender Frequenz hat der effektive Mittelwert der Permeabilität das Bestreben, von der Feldstärke unabhängig zu werden.

4. Der effektive Mittelwert der Permeabilität nimmt bei dem untersuchten Eisen bis etwa  $n = 10000$  sehr schnell ab, von da an nur sehr langsam und fast linear.

5. Es werden effektive Induktionen erreicht, die viel höher liegen, als die sonst bei Gleichstrommagnetisierung bekannten.

6. Schließlich wird eine Hypothese gegeben, die darin besteht, daß die Permeabilität des Eisens im schnellen Wechselfeld nicht genügend Zeit findet, den Endwert zu erreichen, der ihr sonst bei Gleichstrom- oder langsamer Wechselstrommagnetisierung zukommt. Diese Hypothese gestattet uns

nicht nur die Resultate vorliegender Untersuchung, sondern auch die der anderen Beobachter zu erklären.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Hrn. Prof. Dr. Déguisne, dem Direktor des Elektrotechnischen Instituts des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. für das Interesse, das er meiner Arbeit entgegenbrachte, zu danken.

Auch der Firma Hartmann & Braun bin ich für die freundliche leihweise Überlassung eines niedrigzeigenden Multizellulervoltmeters zu Dank verpflichtet.

(Eingegangen 12. Juni 1908.)

#### 4. Versuche über die Solarisation photographischer Platten; von B. Walter.

(Hierzu Taf. I.)

Die Angaben verschiedener Beobachter über die Belichtung, welche notwendig ist, um im Entwickler die größtmögliche Schwärzung einer Bromsilberplatte zu erzielen, weichen voneinander ganz außerordentlich ab. Nach Ebert<sup>1)</sup> z. B., welcher mit dem Lichte der Amylacetatlampe arbeitete, erhält man die maximale Schwärzung mit einer Lichtenergie von etwa 5000 Erg dieser Lichtquelle, während ein eben entwickelbarer Eindruck mit ungefähr einem Erg erzielt wurde. Die beiden in Frage kommenden „Belichtungen“, die man übrigens gegenwärtig nicht in Erg, sondern in *Meterherzenssekunden* auszudrücken pflegt, verhalten sich danach also ungefähr wie 1:5000.

Precht<sup>2)</sup> dagegen, der mit brennendem Magnesiumband arbeitete, fand, daß der Beginn der Solarisation einer Belichtung entsprach, die gleich dem 20- bis 25 000 fachen der „Normalexposition“ war. Berücksichtigt man nun aber, daß einerseits der Beginn der Solarisation offenbar gleichbedeutend ist mit der größtmöglichen Schwärzung, und daß andererseits die zur Hervorrufung der „normalen“ Schwärzung einer Platte notwendige Belichtung zum mindesten auf das 10 fache des Schwellenwertes der letzteren angenommen werden muß, so ergibt sich, daß nach Precht das Verhältnis der beiden in Frage kommenden Belichtungen zum mindesten auf 1:200 000 zu setzen ist.

An dritter Stelle möge hier noch eine Angabe von Scheiner<sup>3)</sup> erwähnt werden, der nach brieflicher Mitteilung mit der Benzinlampe seines Sensitometers belichtete und dabei fand, daß „auf der einen Platte das Maximum des Silber-

1) H. Ebert, Eders Jahrbuch d. Photogr. 8. p. 14. 1894.

2) J. Precht, Physik. Zeitschr. 3. p. 426. 1902.

3) J. Scheiner, Populäre Astrophysik p. 313. 1908.

niederschlag es etwa bei der 100fachen Lichtstärke eintreten kann, die zur Hervorbringung der ersten Spuren des Niederschlages erforderlich ist, während bei der anderen Platte das 300—400fache notwendig ist<sup>1)</sup>. Das erwähnte Verhältnis würde also nach Scheiner zwischen 1:100 und 1:400 schwanken.

In ähnlich schroffer Weise wie diese mit *Lichtstrahlen* gewonnenen Ergebnisse verschiedener Beobachter stehen sich ferner auch die mit *Röntgenstrahlen* erhaltenen gegenüber; denn während sowohl Precht<sup>1)</sup> als auch Hansmann<sup>2)</sup> mit dieser Strahlengattung eine Solarisation überhaupt nicht finden konnten, soll dieselbe nach Eykman<sup>3)</sup>, sowie auch nach Holzknecht<sup>4)</sup> mit Leichtigkeit nachzuweisen sein.

Welches ist nun die Ursache dieser so erheblichen Unterschiede? Beschränkt man sich zunächst auf die oben erwähnten Beobachtungen mit Lichtstrahlen, so kann man hier eine Verschiedenheit 1. der spektralen Zusammensetzung der von den verschiedenen Beobachtern benutzten Lichtquellen, 2. der Intensität der letzteren und 3. der Belichtungsart annehmen, da Scheiner z. B. eine intermittierende, die beiden anderen Beobachter dagegen eine fortlaufende Belichtung anwandten.

Ich habe deshalb alle diese Faktoren in weitgehendem Maße verändert, jedoch für keinen derselben einen wesentlichen Einfluß auf die Lage des Schwärzungsmaximums einer photographischen Platte finden können. Von den vielen Versuchen, die ich in dieser Beziehung angestellt habe, seien nur einige angeführt. Für eine bestimmte Plattensorte wurde das Verhältnis der dem Schwellenwert und der der Maximalschwärzung entsprechenden Belichtungen einmal mit dem Lichte einer freibrennenden Hefnerlampe und das andere Mal nach Vorschaltung einer Kupferoxydammoniaklösung bestimmt, welche die brechbaren Strahlen des Spektrums von  $F$  an so gut wie vollständig hindurchließ, die weniger brechbaren von  $E \frac{1}{2} F$  an aber vollständig

1) J. Precht, Archiv f. wissensch. Phot. 1. p. 260. 1899.

2) F. Hansmann, Fortschr. auf d. Geb. d. Röntgenstr. 5. p. 89. 1901/02.

3) P. H. Eykman, Fortschr. auf d. Geb. d. Röntgenstr. 5. p. 261. 1901/02.

4) G. Holzknecht, Fortschr. auf d. Geb. d. Röntgenstr. 5. p. 323. 1901/02.

absorbierte, wie einerseits aus spektroskopischen Beobachtungen und andererseits auch daraus hervorging, daß die Wirkung einer Nernstlampe auf ein Radiometer durch die Lösung auf etwa  $\frac{1}{20}$  verkleinert wurde. Das in Rede stehende Verhältniß blieb jedoch bei diesen beiden spektral so sehr verschiedenen Lichtquellen innerhalb des Bereiches der Versuchsfehler unverändert, so daß es also bei den Versuchen von Ebert und Scheiner jedenfalls nicht der verhältnismäßig große Prozentsatz ihrer Lichtquellen an roten und ultraroten Strahlen gewesen sein kann, welcher die leichtere Solarisierbarkeit ihrer Platten verursachte.

Auch als an Stelle der Amylacetatlampe ein frei glühender Nernststift angewendet wurde, dessen photographische, optische und kalorische Wirksamkeit bzw. 50, 22 und 3,2 mal so groß war wie die der ersteren Lichtquelle, und dessen Strahlung daher im Ultrarot *prozentuell* ganz erheblich hinter der des Hefnerlichtes zurückblieb, war doch das Verhältniß der beiden in Rede stehenden Belichtungen bei Benutzung derselben Plattensorte wieder das gleiche wie früher.

Auch bei Versuchen mit derselben Lichtquelle, aber verschiedenem Abstand von ihr, d. h. also mit verschiedener *Intensität* des wirksamen Lichtes ergaben sich keine wesentlichen Unterschiede; und ebensowenig auch, als an Stelle der kontinuierlichen eine intermittierende Belichtung mit 40 Wechseln in der Sekunde angewandt wurde.

Weiter konnte dann die Ursache der großen Unterschiede in den Resultaten der genannten Beobachter in der Verschiedenheit der von ihnen benutzten *photographischen Entwickler* liegen. Ebert arbeitete meist mit Hydrochinon oder Rodinal, Precht meist mit Edinollösung 1:25, Scheiner dagegen mit Eisenentwickler. Ich habe nun auch alle diese Hervorrufungsflüssigkeiten mit dem von mir selbst bei meinen später zu beschreibenden Versuchen stets benutzten Metol-Hydrochinon-Potasche-Entwickler verglichen, jedoch selbst bei Anwendung ziemlich verschiedener Entwicklungsdauer keine nennenswerte Verschiebung der dem Schwärzungsmaximum oder dem Schwellenwerte entsprechenden Belichtung feststellen können.

Dagegen zeigte sich bei diesen Versuchen, daß die *absolute* Schwärzung der Platten *an der Stelle des Schwärzungsmaximums*

für die verschiedenen Entwickler auch bei derselben Plattensorte und bei normaler Entwicklungsdauer ganz verschieden ausfiel, trotzdem beim Schwellenwerte keine solchen Unterschiede vorhanden waren, d. h. also die Entwickler ganz normal arbeiteten. So zeigte z. B. die mit *Rodinal* entwickelte Hälfte einer Schleussnerplatte, die streifenweise zunehmenden Belichtungen ausgesetzt und dann senkrecht zu den Streifen in zwei Teile zerschnitten war, an der Stelle des Schwärzungsmaximums nach einer später zu beschreibenden Skala eine Schwärzung, die etwas kleiner als 1 war, während die andere mit *Metol-Hydrochinon* entwickelte Hälfte die Schwärzung 8 aufwies. Die mit dem Hurter und Driffieldschen *Normal-Eisenentwickler*<sup>1)</sup> behandelte Hälfte einer ebenso belichteten Hauffplatte ferner besaß an der Stelle ihres Schwärzungsmaximums nur die Schwärzung 2, während die andere, mit *Metol-Hydrochinon* entwickelte Hälfte die Schwärzung 10 zeigte. Noch geringer endlich erwies sich die Schwärzung derartig belichteter Platten im *Edinol*-Entwickler, so daß demnach als das Ergebnis dieser Versuche der Satz aufgestellt werden kann, daß im Anfangsgebiete der Solarisation die verschiedenen Entwickler zwar sehr verschiedene Schwärzungen liefern, daß aber trotzdem bei normaler Entwicklungsart die maximale Schwärzung bei allen nahezu für die gleiche Belichtung eintritt.

Dieser Satz scheint mir für die Theorie der Vorgänge bei der Solarisation von großer Bedeutung zu sein, worauf ich weiter unten zurückkomme.

Kehren wir indessen wieder zu den eingangs festgestellten Unterschieden der verschiedenen Beobachter hinsichtlich des Verhältnisses zwischen der dem Schwellenwert und der dem Schwärzungsmaximum entsprechenden Belichtung zurück, so schien nun als letzter Erklärungsgrund derselben nur noch ein verschiedenes Verhalten der verschiedenen von ihnen benutzten Plattensorten übrig zu bleiben. Diese Vermutung erwies sich tatsächlich als die richtige; denn als ich eine größere Zahl gewöhnlicher photographischer Bromsilberplatten verschiedener Herkunft in der fraglichen Hinsicht untersuchte, zeigte sich sofort, daß dieselben hinsichtlich der dem

---

1) s. Eders Jahrbuch f. 1899. p. 222.

Schwärzungsmaximum entsprechenden Belichtung ganz gewaltige Unterschiede zeigten; und zwar auch dann, wenn sie sich in bezug auf den Schwellenwert derselben so gut wie gar nicht unterschieden.

Hieraus ergibt sich zunächst, daß die bisher allgemein verbreitete Auffassung, wonach zwischen den beiden in Rede stehenden Belichtungen ein gesetzmäßiger Zusammenhang bestehen soll — eine Auffassung, aus der sich ja u. a. auch das Bestreben der eingangs genannten Beobachter, das Verhältnis jener beiden Belichtungen festzustellen, erklärt —, daß also diese Auffassung nicht zutreffend sein kann. Ebenso wenig gilt ferner aber auch der bisher meist als selbstverständlich hingestellte Satz, daß die empfindlichere Platte auch die leichter solarisierende sei; denn es findet vielmehr ebenso oft auch das Umgekehrte statt. Als ein besonders hervorstechendes Beispiel dieser Art mögen aus der weiter unten folgenden Tab. I nur die Lumièreplatte III und die Platte F. W. II angeführt werden, von denen die erstere, trotzdem sie etwa 35 mal so empfindlich ist wie die letztere, doch erst bei einer etwa 60—100 mal stärkeren Belichtung zu solarisieren beginnt.

Offenbar hängt also, was auch theoretisch von Bedeutung ist, das Auftreten der *maximalen* Schwärzung einer Platte von ganz anderen Bedingungen ab als das der ersten Spuren derselben; und es hat daher auch keinen Sinn, das *Verhältnis* der den beiden Erscheinungen entsprechenden Belichtungen festzustellen, sondern man wird vielmehr richtiger für jede Plattensorte die *absoluten Werte* dieser beiden Belichtungen angeben. Dies ist in der folgenden Tab. I geschehen; und zwar bedeutet darin  $b_m$  die der maximalen, und  $b_s$  die dem Schwellenwerte entsprechende Belichtung — in Meterkerzensekunden —, von denen die letztere übrigens nur sehr angenähert bestimmt und also nicht als eine genaue Empfindlichkeitsangabe der betr. Platte aufzufassen ist. Die Reihenfolge der Platten ist eine derartige, daß die Größe  $b_m$  im allgemeinen von oben nach unten hin zunimmt; jedoch ist hierzu zu bemerken, daß diese Größe auch bei Platten derselben Fabrik, ja häufig bei solchen aus demselben Paket und bisweilen sogar für verschiedene Stellen derselben Platte große Unterschiede zeigt, so daß deshalb in solchen Fällen, wo mehrere



Werte gefunden wurden, die gefundenen Grenzwerte angegeben sind.

Weiter findet man in der Tab. I unter  $s_m$  die absolute Größe der Schwärzung der verschiedenen Platten an der Stelle ihrer maximalen Schwärzung in einer von 1—10 gehenden Skala angegeben, die so gebildet wurde, daß der hellsten Platte die Nummer 1 und der dunkelsten die Nummer 10 gegeben wurde. Die dabei zum Vergleich herangezogenen Platten waren sämtlich in demselben Metol-Hydrochinon-Potasse-Entwickler drei Minuten lang entwickelt und an Luft getrocknet. Sodann ist in der Tab. I noch unter  $p$  der prozentuelle Bromsilbergehalt der empfindlichen Schicht der betreffenden Platte und unter  $\gamma$  das abgerundete Gewicht dieser Schicht in Gramm — bezogen auf eine Plattendicke  $9 \times 12$  cm — angegeben. Diese letzteren Bestimmungen, die sich natürlich auf andere Platten, aber mit derselben Emulsionsnummer beziehen, wurden gemacht, weil ich anfangs die Vermutung hegte, daß die großen Unterschiede, welche die Größe  $b_m$  für die verschiedenen Plattensorten zeigte, möglicherweise auf ein verschiedenes Verhältnis des Bromsilbergehaltes zur Gelatine zurückzuführen seien. Dies trifft jedoch, wie man sieht, nicht zu.

Tabelle I.

Verschiedenes Verhalten photographischer Platten bei der Solarisation durch Lichtstrahlen.

Plattensorte	$b_m$	$b_s$	$s_m$	$p$	$\gamma$
Hauff . . . .	180—400	0,05	8—10	43,5—44,2	0,47—0,51
F. W. II . . .	300—500	0,35	2	35,8	0,39
F. W. I . . .	470—500	0,05	3	41,7	0,34
Agfa . . . .	500—3000	0,05	2	36,4—37,1	0,44
Perutz . . . .	1200	0,05	4	38,6	0,49
Ilford I . . .	900—2500	0,05	1	37,3	0,41
Ilford II . . .	2400	0,10	10	56,5	0,73
Lomberg . . .	3200	0,05	6	40,0	0,49
Lumière I . .	3900—6300	0,05	6	38,1—39,7	0,40—0,42
Schleussner I .	3900—14 000	0,05	2—8	33,5—37,6	0,42—0,38
Lumière II . .	10 000—80 000	0,02	4	43,1—44,4	0,47—0,50
Lumière III . .	31 000	0,01	4	38,1	0,44
Schleussner II .	85 000	0,05	9	36,6—37,0	0,40—0,47



Im einzelnen ist zu dieser Tabelle noch zu bemerken, daß die beiden mit F.W. bezeichneten Platten aus derselben, mir unbekannten Fabrik stammen, und daß die eine davon, F.W. II, etwa siebenmal weniger empfindlich war als die andere (siehe unter  $b_1$ ). Trotzdem solarisierte dieselbe sogar etwas leichter als diese und etwa 60—100 mal so leicht wie die mehr als 30 mal so empfindliche Lumièreplatte III, wie schon oben hervorgehoben wurde.

Bei den Ilford- und Schleussnerplatten bezeichnen die Nummern I die gewöhnlichen, II dagegen die sogen. Röntgenplatten dieser Fabriken, von denen sich diejenige von Ilford auch tatsächlich sowohl durch größeren Bromsilbergehalt als auch durch größere Schichtdicke von der anderen Platte unterschied, während bei Schleussner in den genannten Punkten keine nennenswerten Unterschiede vorhanden waren (s. unter  $p$  und  $\gamma$ ). Von den Lumièreplatten habe ich die gewöhnliche — in blauem Umschlag — mit I, die sogen.  $\Sigma$ -Platte mit II und die erst kürzlich herausgekommene höchstempfindliche — mit violetter Etikett — mit III bezeichnet. Man sieht, daß bei diesen drei Platten die Reihenfolge in der Empfindlichkeit gerade die entgegengesetzte von derjenigen in der Solarisierbarkeit ist, so daß also auch hieraus wieder folgt, daß die Vorgänge bei der Entwicklung einer normal belichteten Platte von ganz anderer Art sein müssen wie bei der einer solarisierten.

Was nun aber ferner die Ursache der so großen Verschiedenheit der Werte von  $b_m$  für die verschiedenen Plattensorten anbetrifft, so scheint in dieser Beziehung die Tab. I nur insofern einen Fingerzeig zu geben, als danach diese Größe bei den Platten derselben Fabrik — auch wenn sie an Empfindlichkeit sehr verschieden sind — doch verhältnismäßig nur geringe Unterschiede zeigt, ein Umstand, der also entweder auf eine bestimmte Eigenschaft der benutzten Gelatine oder, was wahrscheinlicher ist, auf eine bestimmte Behandlungsart der empfindlichen Schicht hinzudeuten scheint (siehe unten).

Des weiteren habe ich dann für die meisten der oben angeführten Plattensorten die entsprechenden Versuche auch mit Röntgenstrahlen durchgeführt. Dies schien mir um so wünschens-

werter, als für diese Strahlenart, wie schon oben erwähnt wurde, von verschiedenen Beobachtern eine Solarisation überhaupt nicht gefunden werden konnte. Es zeigte sich indessen, daß bei Benutzung einer kräftigen Strahlung — Wasserkühlröhre mit 2 Milliamp. Durchschnittsstrom und 14 cm Abstand der Platten von der Antikathode — die Erscheinung bei *allen* benutzten Plattensorten leicht nachzuweisen, ja bei den am leichtesten solarisierenden schon nach 1 Min. Bestrahlungszeit deutlich zu erkennen war. Ferner war hier allgemein die Abnahme der Schwärzung im Gebiete der Solarisation bei gleicher Zunahme der Bestrahlungszeit sogar noch etwas stärker als bei Lichtstrahlen.

In der folgenden Tab. II sind nun nur die Werte von  $b_m$ ,  $s_m$ ,  $p$  und  $\gamma$  angegeben — und zwar das erstere in „Metermilliamperesekunden“ und bezogen auf eine Röhrenhärte 6 nach der von mir angegebenen Härteskala.<sup>1)</sup> Die Größen  $s_m$  ferner wurden wieder ähnlich wie bei Tab. I durch Vergleich der maximalen Schwärzungen der verschiedenen Plattensorten gewonnen; dabei ist aber zu bemerken, daß die Platten hier erheblich stärker geschwärzt waren als die entsprechenden Nummern der Tab. I. Es dürfte dies seinen Grund darin haben, daß die Wirkung der Röntgenstrahlen durch die ganze Schicht hindurch so gut wie gleich stark ist, diejenige der Lichtstrahlen dagegen von der Oberfläche nach der Tiefe hin stark abnimmt, ein Umstand, der noch zur Erklärung mehrerer anderer bei der Solarisation auftretender Erscheinungen heranzuziehen ist, bisher aber wenig beachtet zu sein scheint.<sup>2)</sup>

1) B. Walter, Fortschr. auf d. Geb. der Röntgenstr. 6. p. 63. 1902/03.

2) Belichtet man z. B. — bei streifenweise um das Doppelte zunehmender Expositionszeit — die eine Hälfte einer Platte schwach, die andere dagegen solarisierend und entwickelt beide Hälften gleichzeitig, so wird man bei einigermaßen richtiger Bemessung der Belichtungszeiten in den fertigen Platten stets zwei Felder finden, die in der Durchsicht nahezu gleich stark geschwärzt sind. In der Aufsicht dagegen zeigt dann das solarisierend belichtete dieser beiden Felder stets einen größeren Oberflächen-glanz als das andere, was sich einfach so erklärt, daß bei diesem letzteren von den reduzierten Silberteilechen sich verhältnismäßig mehr an der Oberfläche der Gelatine befinden und ihr daher auch mehr von ihrem

Die Größe  $b$ , ist in Tab. II nicht angegeben, da sich nämlich zeigte, daß dieselbe — mit Ausnahme der ganz unempfindlichen Platte F.W. II — für die sämtlichen anderen untersuchten Platten — und zwar auch für die dem Lichte gegenüber so sehr viel empfindlicheren Lumièreplatten II und III — annähernd den gleichen Wert hatte, nämlich etwa 0,2 in der obengenannten Einheit, und da außerdem über das Verhalten der Platten in dieser Beziehung auch bereits von mir auf dem letzten Kongreß der deutschen Röntgengesellschaft berichtet worden ist (siehe die Verhandlungen der Gesellschaft Bd. IV, Hamburg, Gräfe & Sillem).

Von den daselbst beschriebenen Tatsachen verdient eine jedoch auch hier hervorgehoben zu werden, die Erscheinung nämlich, daß die Zunahme der Schwärzung einer Bromsilberplatte bei zunehmender Bestrahlungszeit, d. h. also die sogenannte „Gradation“, für die gewöhnlichen normalen Bestrahlungszeiten bei Anwendung von Licht eine etwa dreimal so starke ist wie bei Röntgenstrahlen. Für solarisierende Bestrahlungen dagegen ist ein solcher Unterschied nicht vorhanden, sondern die Gradation ist hier bei den mit Röntgenstrahlen behandelten Platten in der Regel sogar etwas stärker als bei den von Lichtstrahlen getroffenen.

Die Erklärung dieses verschiedenen Verhaltens der beiden Strahlengattungen ist wohl ebenfalls darin zu suchen, daß bei schwacher Bestrahlung die viel größere Absorption der Lichtstrahlen in der empfindlichen Schicht mehr ins Gewicht fällt als bei der solarisierenden.

natürlichen Glanze nehmen. In dem ersten Felde sind demnach die Silberteilechen mehr in den unteren Teilen der Schicht zu suchen, und tatsächlich machen sie sich auch hier von der Glasseite der Platte her durch einen stärkeren weißlichen Schimmer bemerkbar. Alle diese Unterschiede erklären sich natürlich einfach dadurch, daß bei einer gewöhnlich belichteten Platte die Zahl der reduzierten Silberteilechen — der Wirkung des Lichtes entsprechend — von der Oberfläche nach der Tiefe hin zunimmt, bei einer solarisierend belichteten dagegen umgekehrt abnimmt, denn es sind hier natürlich die an der Oberfläche liegenden Teilchen am stärksten solarisiert. Bei den Röntgenstrahlen fallen alle diese Unterschiede fort.

Tabelle II.

Verschiedenes Verhalten photographischer Platten bei der Solarisation durch Röntgenstrahlen.

Plattensorte	$b_m$	$s_m$	$p$	$\gamma$
Agfa . . . . .	5500	5	36,4—37,1	0,44
F. W. I . . . .	6000	5	41,7	0,34
F. W. II . . . .	10500	5	35,8	0,39
Perutz . . . . .	12000	4	38,6	0,49
Lomborg . . . .	12000	7	40,0	0,49
Ilford I . . . .	12000	1	37,3	0,41
Hauff . . . . .	18000	9	43,5—44,2	0,47—0,51
Schleussner I . .	21000	3	33,5—37,6	0,42—0,88
Ilford II . . . .	24000	10	56,5	0,73
Schleussner II . .	42000	8	36,6—37,0	0,40—0,47
Lumière II . . .	72000	4	43,1—44,4	0,47—0,50
Lumière I . . . .	84000	5	38,1—39,7	0,40—0,42

Man sieht, daß die Reihenfolge der Platten in bezug auf Solarisierbarkeit hier bei den Röntgenstrahlen im allgemeinen derjenigen bei Lichtstrahlen ähnlich ist, daß indessen doch einige bemerkenswerte Ausnahmen stattfinden. Vor allem steht die Hauff-Platte hier nicht mehr wie früher an *erster*, sondern erst an *siebenter* Stelle, und andererseits ist umgekehrt die Lumière I-Platte, die früher an fünftletzter Stelle stand, jetzt an die letzte gerückt. Dies scheint darauf hinzudeuten, daß diejenige Eigenschaft der empfindlichen Schicht, welche die mehr oder weniger große Solarisierbarkeit derselben bedingt, bei den verschiedenen Platten auch in verschiedener Weise *nach der Tiefe hin* verteilt ist.

Was ferner die absoluten Werte  $s_m$  der Schwärzung der Platten im Anfangsgebiete der Solarisation angeht, so ist besonders der starke Unterschied der beiden Ilford-Platten bemerkenswert, von denen I in beiden Tabellen die hellste und II die dunkelste ist. Zum größeren Teil ist dies natürlich auf die größere Schichtdicke dieser letzteren Platte, zum Teil aber auch vielleicht auf den größeren Bromsilbergehalt derselben zurückzuführen. Daß aber auch Platten mit verhältnismäßig geringer Schichtdicke und geringem AgBr-Gehalt bei dieser Behandlungsweise sehr stark geschwärzt werden können, zeigt

z. B. die Platte II von Schleussner, die in beiden Tabellen nahezu die gleiche Schwärzung zeigt wie Ilford II, trotzdem ihr Gehalt an AgBr sogar hinter dem der Ilford I-Platte zurücksteht.

Alles in allem kann man also sagen, daß auch die Unterschiede in der absoluten Größe  $s_m$  der Schwärzung dieser verschiedenen Platten sich keineswegs allein durch die Unterschiede derselben in der Schichtdicke und dem Bromsilbergehalte erklären, sondern daß auch sie — ebenso wie die bei der Größe  $b_m$  — darauf hindeuten, daß man es hier mit vorläufig noch unbekannten Faktoren zu tun hat, welche das Bromsilber unter den in Rede stehenden Umständen in sehr verschiedener Weise beeinflussen.

An dritter Stelle habe ich dann die verschiedenen photographischen Platten auch noch in bezug auf ihr Verhalten beim sogenannten *Claydeneffekt* untersucht, bei dem es sich ja ebenfalls um eine Solarisationserscheinung, wenn auch ganz anderer Art, handelt. Dieselbe tritt bekanntlich dann auf, wenn man auf einer lichtempfindlichen Platte einen nicht zu starken elektrischen Funken oder Blitz aufnimmt und dann die ganze Platte einer schwachen Nachbelichtung aussetzt. Bei der Entwicklung der Platte kommt dann das Bild der Entladung bei sehr schwacher Nachbelichtung noch als schwache dunkle Linie zum Vorschein, bei etwas stärkerer dagegen verschwindet es ganz und bei noch stärkerer tritt es sogar als helle Linie auf, so daß dann also im Positiv ein sogenannter „schwarzer“ Blitz erscheint.

Da nun diese Erscheinung, wie ich schon mehrfach dargestellt habe <sup>1)</sup>, bei der Aufnahme von Blitzen sehr störend wirken kann, insofern hierbei gerade die für die Entstehungsweise desselben so charakteristischen aber meistens nur schwachen Vorentladungen desselben durch das von der Wolke reflektierte Licht der unmittelbar darauf folgenden sehr hellen Hauptentladung eben durch den Claydeneffekt häufig ganz verwischt werden können, so schien die Untersuchung verschiedener Platten nach dieser Richtung hin auch von einem gewissen praktischen Werte zu sein, insofern sich dabei möglicherweise eine

1) Vgl. u. a. B. Walter, Über die Entstehungsweise des Blitzes, Jahrb. d. Hamb. wiss. Anst. 20. 1903.

Platte finden könnte, die den Claydeneffekt erheblich weniger als andere aufwies.

Diese Vermutung bestätigte sich, wie die Tab. III zeigt, tatsächlich. In derselben ist unter  $b_0$  die Größe der Nachbelichtung in Meterkerzenssekunden angegeben, welche — bei Anwendung einer Hefnerlampe zu diesem Zwecke — notwendig ist, um auf der betreffenden Plattensorte das Funkenbild gerade zum Verschwinden zu bringen. Unter  $s_0$  ferner ist dann noch die absolute Größe der Schwärzung der Platten für diese Größe  $b_0$  der Nachbelichtung angegeben, sowie auch unter  $s'$  noch die Schwärzung derselben für eine Nachbelichtung von  $1\frac{1}{4}$  M.K.S., eine Schwärzung, die in theoretischer Beziehung vielleicht von ebenso großer Bedeutung ist als die Größe  $s_0$ , insofern sie sich auf eine konstante Nachbelichtung bezieht. Dieselbe wird zum Teil natürlich schon durch die Empfindlichkeit der Platte, zum Teil aber auch durch deren Gradation bestimmt, da es sich ja hier schon um eine den Schwellenwert meist erheblich übersteigende Größe der Belichtung handelt.

Tabelle III.

Verschiedenes Verhalten photographischer Platten beim Claydeneffekt.

Plattensorte	$b_0$	$s_0$	$s'$	$p$	$\gamma$
Ilford I . . .	$1\frac{1}{4}$	1	4	37,3	0,41
Agfa . . .	$2\frac{1}{2}$	4	6	36,4—37,1	0,44
Perutz . . .	4	8	9	38,6	0,49
Lomborg . . .	4	6	8	40,0	0,49
Ilford II . . .	4	10	5	56,5	0,78
Hauff . . .	5	6	4	43,5—44,2	0,47—0,51
Schleussner I . .	5	4	5	33,5—37,6	0,42—0,88
Lumière II . . .	5	8	8	43,1—44,4	0,47—0,59
Lumière III . . .	5	5	8	38,1	0,44
F. W. I . . .	10	7	8	41,7	0,34
F. W. II . . .	20	5	$\frac{1}{2}$	35,8	0,39
Lumière I . . .	20	10	2	38,1—39,7	0,40—0,43

Man sieht, daß die Reihenfolge der Platten hier wieder eine ganz andere ist als in den Tab. I und II, und daß besonders die Ilford I- und die beiden F. W.-Platten ihre Stelle gegen früher verändert haben.

Durch eine große Schwärzung  $s'$  zeichnet sich hier — neben den hochempfindlichen Lumièreplatten II und III — besonders

die Lombergplatte aus. Da dieselbe nun aber beim Schwellenwerte keine größere Schwärzung zeigt, als die meisten anderen Platten (vgl. Tab. I unter  $b_s$ ), so haben wir hier also eine Platte mit starker Gradation vor uns. Im Gegensatz dazu ist  $s'$  für die Lumière I-Platte bei gleichem  $b_s$  verhältnismäßig klein, so daß also diese eine sehr weich arbeitende Emulsion besitzt.

Der große Unterschied in dem Verhalten der beiden äußersten Glieder der in Tab. III aufgeführten Plattenreihe wird nun aber wohl am schönsten durch die Figur der Taf. I gekennzeichnet, deren obere Hälfte von einer Lumière I- und deren untere von einer genau so behandelten Ilford I-Platte stammt. Auf die fünf Felder der beiden Platten wurde nämlich zunächst mit einem lichtstarken Objektiv je ein 15 cm langer, möglichst schwacher Funke eines Induktionsapparates abgebildet, und dann dieselben mit einer Hefnerlampe aus 2 m Abstand bzw. mit  $1\frac{1}{4}$ ,  $2\frac{1}{2}$ , 5, 10 und 20 M.K.S. nachbelichtet.

Wie man sieht, zeigt die unten abgebildete Ilfordplatte lauter „schwarze“ Funken, während die letzteren bei der oben befindlichen Lumièreplatte noch sämtlich richtig als Positiv herausgekommen sind.

Somit ist es denn auch nicht zu verwundern, daß der Claydeneffekt zuerst in England entdeckt wurde; andererseits wird man aber doch nach dem oben Gesagten für Blitzaufnahmen in Zukunft nicht mehr Ilford- sondern am besten gewöhnliche Lumièreplatten — in blauem Umschlag — verwenden; denn die nicht umgekehrten Bilder der letzteren Platte lassen doch erheblich viel mehr Einzelheiten erkennen als die umgekehrten der anderen.

Wenn wir nun aber zum Schluß nach der Ursache des oben nachgewiesenen, so sehr verschiedenen Verhaltens der verschiedenen Platten bei der Solarisation fragen, so ist es zu diesem Zwecke natürlich zunächst notwendig, uns die bisher über diese Erscheinung aufgestellten Theorien daraufhin etwas genauer anzusehen. Es bestehen deren im wesentlichen drei:

1. Die „Oxydationstheorie“ von Abney<sup>1)</sup>, wonach die Umkehrung des Bildes bei der Solarisation auf die Oxydation

1) W. Abney, Phil. Mag. (5) 10. p. 200. 1880; Treatise on Photography, 10. Aufl., p. 97. 1907.



des Subsalzes des Silbers zurückzuführen ist, welches bei der ersten Einwirkung des Lichtes auf das exponierte Silbersalz gebildet wurde. Das oxydierte Silbersalz, das man beim Bromsilber gewöhnlich als Oxybromid bezeichnet, soll nämlich der Einwirkung des Entwicklers gegenüber widerstandsfähiger sein als das Subsalz selbst.

2. Die „*Gerbungstheorie*“ von Luther<sup>1)</sup>, nach welcher das bei der Belichtung frei werdende Brom sich mit der Gelatine der Schicht verbindet und dieselbe gerbt, d. h. für den Durchtritt des Entwicklers undurchlässiger macht.

3. Die „*Bromabspaltungstheorie*“ von Hurter und Driffield<sup>2)</sup>, nach welcher bei schwacher Belichtung nur eine molekulare Umlagerung, bei starker jedoch eine wirkliche Abspaltung des Broms aus dem Bromsilber stattfindet und dann dieses abgespaltene Brom als stark oxydierende Substanz der reduzierenden Wirkung des Entwicklers entgegenwirkt.

Diese letztere Theorie ist in neuerer Zeit besonders von Lüppo-Cramer<sup>3)</sup> vertreten worden, der dieselbe allerdings dahin modifiziert hat, daß die Wirkung des Lichtes auf Bromsilber vom Eintritt der ersten Entwickelbarkeit an bis zur weitgehenden Solarisation hin in einer kontinuierlichen Bromabspaltung besteht, daß jedoch das abgespaltene Brom niemals aus dem Attraktionsbereich des Bromsilberkornes herausgeht. Eine Mitwirkung des Sauerstoffs der Luft (Abney) oder ein Einfluß des Bindemittels (Luther) brauchen jedoch zur Erklärung nicht herangezogen zu werden.

Stellen wir nun die Frage, welche von den drei genannten Theorien die großen Unterschiede, welche sich in dem Verhalten der verschiedenen Plattensorten bei der Solarisation zeigen, am einfachsten erklärt, so scheint dies im ersten Augenblick die Gerbungstheorie zu sein; denn man braucht nach dieser zu dem genannten Zwecke offenbar nur die Annahme zu machen, daß es sich in den genannten Fällen lediglich um eine verschiedene Reaktionsfähigkeit der Gelatine der verschiedenen Platten handelt. Einerseits ist nun aber damit eine weitere Auf-

1) R. Luther, Die chemischen Vorgänge in der Photographie p. 47. Halle 1899.

2) F. Hurter u. V. C. Driffield, Eders Jahrb. f. 1899 p. 200.

3) Lüppo-Cramer, Photographische Probleme, p. 138. 1907.



klärung der Erscheinung natürlich nicht erzielt, und andererseits lassen sich doch so viele, gegen die Gerbungstheorie sprechende Tatsachen anführen, daß diese wohl kaum noch aufrecht erhalten werden kann. Ich erwähne nur folgende, von mir angestellte Versuche:

1. Wird die eine Hälfte einer Platte solarisierend, die andere aber schwach belichtet, und werden dann beide gleichzeitig entwickelt, so erscheint das Bild *auf der Glasseite der Platte* bei beiden nahezu in demselben Augenblicke, vorausgesetzt, daß die Belichtungszeiten so abgepaßt sind, daß die Schwärzung in beiden annähernd die gleiche wird.

2. Auch das *Fixieren* der solarisierten Plattenhälfte von 1. ist in ungefähr derselben Zeit beendet wie das der normal belichteten Hälfte.

3. Belichtet man eine Platte zunächst in streifenweise zunehmenden Zeiträumen, halbiert dieselbe dann senkrecht zu den Streifen, badet die eine Hälfte etwa 10 Min. in einer 0,1 proz. Bromlösung, die andere ebenso lange in Wasser und entwickelt dann beide gleichzeitig, so beträgt die Schwärzung in der ersten Hälfte zwar nur etwa  $\frac{1}{10}$  von der in der zweiten, nichtsdestoweniger aber erscheint dieselbe *auf der Glasseite* in beiden Hälften fast gleichzeitig.

Schon diese Versuche nun scheinen mir überzeugend darzutun, daß einerseits in einer solarisierend belichteten Platte die Diffusion des Entwicklers durch die Gelatine überhaupt nicht behindert ist, und daß andererseits auch das bei einer solchen Belichtung *möglicherweise* frei werdende Brom eine solche Diffusionsbehinderung, wie sie die Gerbungstheorie annimmt, gar nicht zu bewirken vermag. Somit sind wir also nur noch auf die beiden anderen, oben erwähnten Solarisationstheorien angewiesen. Von diesen ist nun die letztere, die Bromabspaltungstheorie, zwar zweifellos die einfachere, gerade deswegen dürfte sie aber kaum imstande sein, der hier zur Erklärung stehenden, so außerordentlich mannigfaltigen Verschiedenheit in dem Verhalten der verschiedenen Platten bei den verschiedenen Arten der Solarisation gerecht zu werden, wie denn auch Lüppo-Cramer l. c. selbst zugibt, daß das Phänomen der Solarisation noch eine ganze Reihe ungelöster Probleme darbietet.

Vor allem scheint mir gegen diese Theorie auch die bereits oben hervorgehobene Tatsache zu sprechen, daß im Gebiete der maximalen Schwärzung die verschiedenen Entwickler sehr verschiedene Größen der absoluten Schwärzung liefern, daß aber trotzdem die maximale Schwärzung selbst für alle nahezu bei derselben Belichtung eintritt. Denn da nach dieser Theorie die Solarisation lediglich auf eine Abschwächung der chemischen Wirksamkeit des Entwicklers durch das bei der Belichtung abgespaltene Brom zurückzuführen ist, so sollte man danach doch erwarten, daß für einen Entwickler, welcher eine solche stark belichtete Platte weniger schwärzt als ein anderer, auch das Schwärzungsmaximum schon für eine geringere Belichtung eintritt. Dies ist nun aber nach meinen Versuchen nicht der Fall; und so scheint denn doch nur die Annahme übrig zu bleiben, daß das Bromsilbermolekül bei zunehmender Belichtung, ähnlich wie die Abneysche Theorie es behauptet, zum mindesten *zwei* qualitativ verschiedene Phasen durchläuft, von denen die erste diejenige ist, welche von dem Entwickler reduziert wird, während die zweite von ihm weniger angegriffen wird. Die maximale Schwärzung würde dann nach dieser Auffassung offenbar dann eintreten, wenn die Belichtung eine derartige war, daß sich die größtmögliche Anzahl der Bromsilberteilchen in der ersten Zerfallsstufe befindet, und sie wird also unabhängig von der Art des Entwicklers sein. Darum kann aber doch die absolute Schwärzung der Platte in den verschiedenen Entwicklern eine verschiedene werden; denn die reduzierende Kraft derselben braucht ja hier durchaus nicht mehr dieselbe zu sein.

Weiter scheint mir aber auch die oben nachgewiesene Tatsache, daß zwischen der Empfindlichkeit und der Solarisierbarkeit einer photographischen Platte nicht der geringste Zusammenhang besteht, sehr dafür zu sprechen, daß die Wirkung des Lichtes nicht eine fortlaufend gleichartige sein kann, sondern daß vielmehr bei der Solarisation die Bildung einer dritten, von der zweiten entwickelbaren vollständig verschiedenen Phase des Bromsilbers beginnt.

Die so sehr verschiedene Solarisierbarkeit selbst gleich empfindlicher Platten wäre dann vielleicht so zu verstehen, daß dieselben in den verschiedenen Fabriken einer verschie-

denen Behandlung unterworfen gewesen sind, durch welche dann später bei der Entwicklung zwar nicht die Bildung der ersten, wohl aber die der zweiten Phase des Bromsilberzerfalles beeinflusst wird. Hierfür spricht, wie schon oben hervorgehoben wurde, besonders der Umstand, daß in den Tabbl. I bis III die Platten derselben Fabrik, auch wenn sie sich durch ihre Empfindlichkeit ganz wesentlich unterscheiden, im Gebiete der Solarisation doch meist nur verhältnismäßig geringe Unterschiede aufweisen (s. besonders die beiden Platten F.W.).

Man sieht demnach, daß die in dieser Abhandlung mitgeteilten Versuche am besten durch eine Solarisationstheorie erklärt werden, welche ähnlich wie die Abneysche zwei voneinander wesentlich verschiedene Zerfallsstufen des Bromsilbers annimmt. Ob es sich dabei aber tatsächlich um ein Subbromid und ein Oxybromid handelt, wie Abney meint, das ist eine Frage, deren Beantwortung wohl noch nicht mit Sicherheit gegeben werden kann.

*Zusammenfassung.* Es ist gezeigt worden, daß photographische Bromsilberplatten verschiedener Herkunft sich selbst bei gleicher Empfindlichkeit hinsichtlich ihrer Solarisierbarkeit oft ganz außerordentlich stark unterscheiden, und daß überhaupt ein Zusammenhang zwischen Empfindlichkeit und Solarisierbarkeit, wie bisher angenommen wurde, nicht besteht. — Die Reihenfolge der Solarisierbarkeit der Platten verschiedener Herkunft ist eine andere für Röntgenstrahlen als für Lichtstrahlen und wieder eine andere beim Claydeneffekt. — Bei Anwendung verschiedener Entwickler tritt bei normaler Entwicklungsdauer der Beginn der Solarisation, d. i. die maximale Schwärzung, stets annähernd für dieselbe Belichtung ein, obwohl die absolute Größe der Schwärzung hier eine sehr verschiedene sein kann. — Es wird schließlich noch gezeigt, daß alle diese Versuchsergebnisse zugunsten einer Theorie der Solarisation sprechen, welche, ähnlich wie die Abneysche, zwei voneinander verschiedene Zerfallsstufen des Bromsilbers annimmt.

Hamburg, Physik. Staatslaboratorium, im Juli 1908.

(Eingegangen 18. Juli 1908.)

**5. Einfluß der Temperatur und des  
Aggregatzustandes auf die Absorptionsspektren  
der geschmolzenen Salze;  
von T. Retschinsky.**

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Firma W. C. Heraeus.)

(Hierzu Taf. II–IV, Figg. 1–9.)

Der Einfluß der Temperatur auf die Absorptionsspektren ist schon mehrmals Gegenstand von Untersuchungen gewesen.<sup>1)</sup> Als Resultat dieser, zum Teil einander widersprechenden Arbeiten kann man die Tatsache nennen, daß für feste Körper und Lösungen die Absorptionsstreifen bei Temperaturerhöhung sich in den meisten Fällen nach der Seite der größeren Wellenlängen verschieben. Es sind aber auch solche Fälle vorhanden, wo eine Verschiebung in umgekehrter, oder auch gar keine stattfindet. Dabei handelt es sich um Verschiebungen, deren Betrag die Größe von ca.  $5\mu$  pro  $100^\circ$  Temperaturerhöhung nicht überschreitet. Nur für AgBr im geschmolzenen Zustand ist eine Verschiebung von viel größerem Betrag von V. Schumann<sup>2)</sup> beobachtet worden.

Genaue spektralphotometrische Messungen im sichtbaren Gebiet verdanken wir Koenigsberger<sup>3)</sup> und Houston.<sup>4)</sup> Koenigsberger findet, daß die Absorptionsbande (Minimum  $540\mu$ ) des festen Fuchsins bei  $100^\circ$  Temperaturerhöhung um ca.  $4\mu$  nach der Seite der größeren Wellenlängen rückt. Für schweres Flintglas findet Koenigsberger ein Vorrücken der Stelle der gleichen Absorption in der gleichen Richtung um ca.  $30\mu$  bei  $100^\circ$  Temperaturerhöhung.

1) Literaturangabe in Kayser's Handbuch der Spektroskopie 3. p. 94; vgl. auch J. Becquerel, Physik. Zeitschr. 1907. p. 929.

2) V. Schumann, Eders Jahrbuch f. Photogr. 7. p. 160. 1893; auch Kayser's Handbuch 3. p. 104.

3) J. Koenigsberger, Ann. d. Phys. 4. p. 796. 1901.

4) R. A. Houston, Ann. d. Phys. 21. p. 535. 1906.

Theoretisch ist die Frage nach dem Einfluß der Temperatur auf die Absorption von Voigt<sup>1)</sup> und Erfle<sup>2)</sup> behandelt worden.

#### Versuchsanordnung.

Zum Zwecke der Untersuchung von Absorptionsspektren der Salze im geschmolzenen Zustande ist, nach einigem Probieren mit größerem Widerstandsofen und flachen planparallelen Gefäßen aus Quarzglas, folgende einfache Versuchsanordnung gewählt worden. Zur Aufnahme der Salze diente ein Reagensglas aus Quarzglas von 7 mm lichter Weite und 50 mm Höhe. Zum Erhitzen wurde ein kleiner zylinderförmiger Widerstandsofen von 10 mm innerem Durchmesser und 70 mm Höhe benutzt. Die Wände des Ofens bestanden aus Schamotte mit eingebetteter Platinspirale. Mit ungefähr 40 Volt und 4—5 Amp. konnte man den Ofen auf 1100° bringen und, eine konstante Netzspannung vorausgesetzt, bei jeder Temperatur dauernd konstant halten. In den Wänden des Ofens befanden sich zwei gegenüberliegende Fenster von  $3 \times 10$  mm, um den Durchgang des Lichtes zu ermöglichen. Die Temperaturmessung geschah mit Hilfe eines Thermoelementes aus Platin und Platinrhodium von 0,04 mm Drahtstärke, das mit einem von der Phys.-Techn. Reichsanstalt geeichten Normalelement verglichen wurde. Die Drähte des Thermoelementes wurden mit einer Quarzglaskapillare voneinander isoliert und befanden sich in einem unten zugeschmolzenen Quarzglasröhrchen von ca. 2 mm Durchmesser, das in das geschmolzene Salz eingetaucht und in dieser Stelle befestigt werden konnte. Während des Versuches wurde die Temperatur dauernd beobachtet. In demselben Ofen konnte man nach Entfernung des Reagensgläschens auch feste Körper untersuchen. Die Fig. 1 stellt einen Längsschnitt des Ofens in  $\frac{1}{2}$  natürlicher Größe dar.

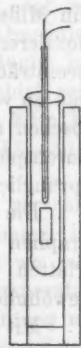


Fig. 1.

Bei Temperaturen unter 800° wurde das Quarzglas nur durch wenige geschmolzene Salze angegriffen. So greifen KJ,

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 6, p. 459, 1901.

2) H. Erfle, Ann. d. Phys. 24, p. 673, 1907.

LiCl und LiBr schon bei 700° stark an, dagegen Li<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> auch bei 1000° wenig. Erdalkalichloride und Bromide greifen bei 800° noch sehr wenig an, noch weniger Alkalisulfate und Chloride. Es wurde für jedes Salz ein neues Gläschen genommen.

Als Lichtquelle diente eine Quarzlampe mit Pb-, Bi-, Zn-, Cd-Amalgamfüllung nach L. Arons.<sup>1)</sup> Die Länge des leuchtenden Fadens war 12 cm. Belastung betrug 145 Volt und 4,5 Amp. Diese Lampe hat für Absorptionsuntersuchungen im Ultraviolett manche Vorteile vor den sonst gebräuchlichen Lichtquellen. Ihr Spektrum übertrifft an Linienreichtum das Funkenspektrum der von Eder und Valenta<sup>2)</sup> benutzten Legierung (Zn, Cd und Pb); auch die Intensitätsverteilung ist günstiger. Dazu kommen noch die leichte Handhabung der Lampe und eine große und konstante Intensität des Lichtes, die sich immer wieder herstellen läßt, wenn man die Lampe mit derselben Stromstärke und Spannung brennen läßt. Bei den Versuchen, die mehrere Stunden dauern, kommt allerdings ein Mißstand hinzu: die verdampften schweren Metalle kondensieren sich langsam an der Wand des Leuchtrohres und beeinträchtigen dadurch die Lichtstärke und Konstanz. Um das zu vermeiden, muß man von Zeit zu Zeit die Lampe auslöschten und die Wände des Leuchtrohres mit heißem Amalgam durchspülen. Dadurch bekommt die Lampe wieder ihre ursprüngliche Intensität.

Die Absorptionsspektren wurden mit einem Quarzspektrographen von Schmidt und Haensch<sup>3)</sup> photographiert. Die Platten waren „Orthochrom T“ der Farbwerke Höchst und gewöhnliche Schleussnerplatten des Handels.

Mit dieser Versuchsanordnung genügte eine Expositionszeit von ca. 3—4 Minuten. Nur bei den Salzen, welche schon bei ihrer Schmelztemperatur das Quarzglas angreifen, mußte man längere Expositionszeiten anwenden. Die kleinste photographisch wahrnehmbare Wellenlänge war 214  $\mu$ . Von 227  $\mu$  an abwärts war die Intensität der Linien relativ schwach.

1) L. Arons, Ann. d. Phys. 23. p. 176. 1907.

2) J. M. Eder und E. Valenta, Beiträge zur Photochemie und Spektralanalyse. Wien 1904. Taf. VIII. p. 104.

3) F. Schmidt und Haensch, Katalog II. p. 88. Sept. 1903.

Es wurden folgende 30 Salze<sup>1)</sup> in geschmolzenem Zustand auf ihre Absorption in sichtbarem und ultraviolettem Gebiet untersucht. Die Sulfate von Li, Na, K, Rb, Ag, die Chloride von Na, K, Rb, Ca, Sr, Ba, Zn, Cd, Pb, Bi, Ag, die Bromide von Na, K, Rb, Ca, Sr, Ba, Zn, Cd, die Nitrate von Na, K, Ca und Ag, KJ und  $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ .

Es hat sich zuerst gezeigt, daß alle diese Salze eine Endabsorption auf der Seite der kürzeren Wellenlängen besitzen, so daß unterhalb einer bestimmten Wellenlänge alles Licht bis zu der kleinsten bei unserer Anordnung wahrnehmbaren Wellenlänge ( $214\ \mu\mu$ ) absorbiert, auf der anderen Seite bis zu der größten Wellenlänge ( $600\ \mu\mu$ ) durchgelassen wurde. Im allgemeinen befindet sich zwischen dem Gebiet, wo praktisch alles absorbiert, und dem, wo alles durchgelassen wird, ein Übergangsgebiet, und deshalb ist die Lage der Endabsorption von der Dicke der absorbierenden Schicht und der Expositionszeit nicht unabhängig. Um diesen Fehler schätzen zu können, wurden dieselben Absorptionsspektren mit verschiedenen Expositionszeiten photographiert. Es ergab sich dabei, daß bei geschmolzenen Salzen die Stelle, wo vollständige Absorption einsetzt, von der Expositionszeit praktisch unabhängig ist; daraus kann man schließen, daß das Übergangsgebiet sehr schmal ist. Fig. 1, Taf. II, stellt die Spektren von KBr bei konstanter Temperatur mit Expositionszeiten: 7—15—30—60—120—240 Sekunden dar.

Die Absorptionsspektren der Salze wurden bei verschiedenen Temperaturen photographiert. Dabei wurde immer bei der tiefsten Temperatur angefangen. In Fällen, wo eine Fälschung des Resultates durch Zersetzung bei hoher Temperatur, durch Reaktion mit dem Quarzglas oder durch Belichtung mit ultraviolettem Licht zu befürchten war, ist nach Beendigung des Versuches zur Kontrolle nochmals bei der niedrigsten Temperatur photographiert worden.

Um den Einfluß des Aggregatzustandes auf das Absorptionsspektrum zu untersuchen, wurde für einige feste Salze die Endabsorption bei Zimmertemperatur bestimmt. Die Herstellung der absorbierenden Schicht geschah folgendermaßen.

1) Von E. Merck, Darmstadt.



Das betreffende Salz wurde in einem Platintiegel geschmolzen und auf Platinblech ausgegossen. Nachdem dem Plättchen die geeignete Form und Dicke mit der Feile gegeben war, wurde es auf der Glasscheibe mit Spiritus geschliffen. Manchen Salzen, die nicht fest genug für das Schleifen waren, konnte man die geeignete Form geben, indem man den Platinspatel auf die ausgegossene flüssige Masse legte. Die Schichtdicke betrug meistens ca. 1 mm. Mit solchen Platten gewonnene Resultate sind mit vielen Fehlern behaftet. Erstens erleidet der Lichtstrahl im Inneren mehrere Reflexionen und dadurch ist die wirksame Schichtdicke nicht mehr definiert, zweitens werden die kleineren Wellenlängen durch diffuse Reflexionen mehr geschwächt, als die größeren. Aber im Falle scharfer Endabsorption und bei den hier gebrauchten Wellenlängen sind diese Fehler zu vernachlässigen, was ein Vergleich der Absorption einer in solcher Weise bearbeiteten NaCl-Platte mit der eines Spaltungsstückes von Steinsalz zeigte.

#### Einfluß der Temperatur und des Aggregatzustandes auf die Absorption.

Die Ergebnisse der Versuche (vgl. Spektrogramme Taf. II–IV, Fig. 2–8) für geschmolzene Salze sind in der Fig. 2 zusammengestellt. Aus jedem Spektrum ist die Wellenlänge der letzten

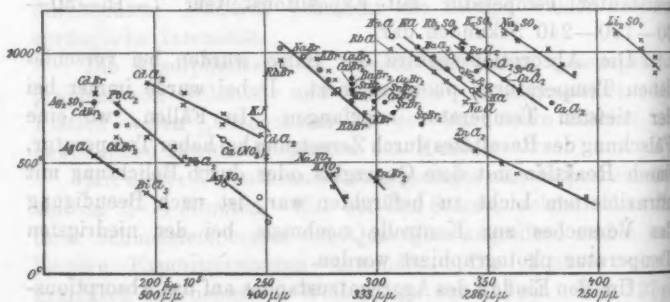


Fig. 2.

noch durchgelassenen Linie abgelesen und das Reziproke dieser Wellenlänge als Abszisse, die Temperatur, die diesem Spektrum entspricht, als Ordinate aufgetragen.



Der Grund, weshalb nicht Wellenlängen, sondern Schwingungszahlen als Abszissen gewählt sind, liegt darin, daß die quantitativen Regelmäßigkeiten dieser Spektre, wie die Fig. 2 lehrt, nur bei dieser Darstellungsart hervortreten.<sup>1)</sup> Die Tab. I ist der Fig. 2 entnommen.

Tabelle I.

	Lage der Absorption in $\mu\mu$	Verschiebung der Absorption für 100°	
		in $\mu\mu$	in $\frac{1}{\mu\mu} \cdot 10^5$
$\text{Li}_2\text{SO}_4$ . .	233	7	12
$\text{Na}_2\text{SO}_4$ . .	270	10	14
KCl . . . .	303	12	13
NaCl . . . .			
RbCl . . . .			
KBr . . . .	357	15	12
NaBr . . . .			
RbBr . . . .			
PbCl <sub>2</sub> . . .	513	30	12
ZnCl <sub>2</sub> . . .	270	14	20
CdCl <sub>2</sub> . . .	454	37	20

Man ersieht daraus, daß der Temperaturkoeffizient (die Neigung der Geraden) von der Wellenlänge unabhängig ist, wenn man ihn in Schwingungszahlen ausdrückt, dagegen bei der Berechnung in Wellenlängen stark zunimmt. Der Temperaturkoeffizient ist nur aus den Geraden berechnet, die bei sechs verschiedenen Temperaturen beobachtete Punkte enthalten, da sonst die stärkeren Liniengruppen das Resultat erheblich fälschen könnten. Aus der Tab. I geht noch hervor, daß  $\text{ZnCl}_2$  und  $\text{CdCl}_2$  einen erheblich größeren Temperaturkoeffizienten haben, als alle anderen Salze. Die schon von vornherein wegen ihrer chemischen Ähnlichkeit plausible Gleichheit der Temperaturkoeffizienten von  $\text{ZnCl}_2$  und  $\text{CdCl}_2$  kommt nicht mehr zur Geltung, wenn man in Wellenlängen rechnet.

1) Die Regelmäßigkeiten in Linien- und Bandenspektren (konstante Differenzen) gelten bekanntlich auch für Schwingungszahlen, nicht für Wellenlängen.

Von den in festem Zustand untersuchten Salzen haben NaCl, KCl, RbCl,  $\text{SrCl}_2$ ,  $\text{Li}_2\text{SO}_4$  und  $\text{Rb}_2\text{SO}_4$  bei Zimmertemperatur die kleinste ( $214 \mu\mu$ ) Wellenlänge noch durchgelassen; LiBr, NaBr, KBr und  $\text{SrBr}_2$  sind bis  $227 \mu\mu$ , KJ bis  $240$ ,  $\text{CdCl}_2$  bis  $297$ ,  $\text{CdBr}_2$  bis  $303$ ,  $\text{PbCl}_2$  bis  $347$ , AgCl bis  $405$ ,  $\text{AgNO}_3$  bis  $361 \mu\mu$  durchlässig. Man sieht aus diesen Zahlen, daß die Endabsorption der festen Salze sehr viel weiter nach den kürzeren Wellenlängen zu liegt, als die der geschmolzenen.

Um den Einfluß der Temperatur von dem des Aggregatzustandes trennen zu können, sind einige feste Salze auch bei höheren Temperaturen untersucht worden. Taf. II–IV, Figg. 2, 3, 4, 5 und 9, und Fig. 3 zeigen entsprechende Spektrogramme und Kurven.

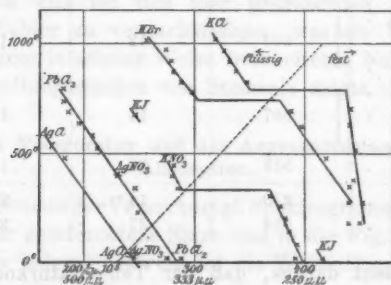


Fig. 3.

Die Stelle gleicher Absorption für NaBr und KBr in festem Zustand verschiebt sich mit steigender Temperatur nach den größeren Wellenlängen um ca.  $14 \cdot 10^5 / \mu\mu$  (dreistellige Reziproke der Wellenlänge) für  $100^\circ$  Temperaturerhöhung. Bei der Schmelztemperatur rückt die Endabsorption dagegen sprunghaft in derselben Richtung um ca.  $80 \cdot 10^5 / \mu\mu$ . Dieser Sprung ist nur durch die Änderung des Aggregatzustandes bedingt.

KCl und NaCl weisen ebenfalls einen Sprung von ca.  $80 \cdot 10^5 / \mu\mu$  bei der Schmelztemperatur auf. Daß der Temperaturkoeffizient für festes KCl und NaCl anscheinend so klein ist, liegt wohl daran, daß unter  $227 \mu\mu$  ein steiler Intensitätsabfall im Spektrum vorhanden ist.

Bei  $\text{KNO}_3$  ist der Sprung auch vorhanden und zwar ungefähr von derselben Größe wie bei  $\text{KCl}$ ,  $\text{NaCl}$ ,  $\text{KBr}$  und  $\text{NaBr}$ . Die Verhältnisse werden aber dadurch kompliziert, daß sein Spektrum ein Absorptionsband zwischen  $325\text{--}270\ \mu\mu$  besitzt.<sup>1)</sup> Dadurch wird das Spektrum von der Schichtdicke, beziehungsweise von inneren Reflexionen, modifiziert. Spektrogramm I—VI, Fig. 9, Taf. IV zeigt das Spektrum eines klaren  $\text{KNO}_3$ -Krystalls von ca. 1 mm Dicke bei sechs verschiedenen Temperaturen. Aufnahme VIII ist bei Zimmertemperatur mit einer  $\text{KNO}_3$ -Platte gemacht, die im flüssigen Zustande ausgegossen und nachher geschliffen war. Die Platte war weiß und schwach durchscheinend. Aufnahme VII gibt das Spektrum der Lichtquelle ohne absorbierende Schicht. Man sieht, daß durch innere Reflexionen die Durchlässigkeit in der Mitte des Bandes mehr abgenommen hat, als an den Rändern. Der Einfluß der Temperatur zeigt sich in folgenden Erscheinungen: bei Temperaturerhöhung rückt die Endabsorption nach rot hin, außerdem wird die Durchlässigkeit in der Mitte des Bandes geringer. Das Spektrum des festen  $\text{NaNO}_3$  ist dem des  $\text{KNO}_3$  ähnlich, nur ist die durchgelassene Liniengruppe um einige  $\mu\mu$  nach der Seite der kürzeren Wellenlängen verschoben.

Aufnahme IX, Fig. 9, Taf. IV, gibt das Spektrum einer schwach durchscheinenden Platte von  $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$  wieder. Das Absorptionsband liegt zwischen  $360$  und  $313\ \mu\mu$ .  $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$  gibt das ähnliche Absorptionsband, dessen Mitte um einige  $\mu\mu$  nach den kürzeren Wellenlängen hin verschoben ist. Wie man sieht, ist dieses Band mit darauf folgender Endabsorption den Nitraten eigentümlich, aber seine Lage hängt auch von der Base ab.

Bei  $\text{AgNO}_3$ ,  $\text{AgCl}$  und  $\text{PbCl}_2$  wurde der Sprung bei der Schmelztemperatur nicht beobachtet, und die Verschiebung der Endabsorption entspricht der Temperaturerhöhung<sup>2)</sup> (vgl. Fig. 3).

1) Das Band hat V. Agafonoff (Compt. rend. 126. p. 490. 1896) an einem  $\text{KNO}_3$ -Krystall beobachtet. Ungefähr dieselben Lagen hat es nach W. N. Hartley (vgl. Chem. Zentralblatt 1902. I. p. 1087) bei Lösungen von  $\text{HNO}_3$ ,  $\text{KNO}_3$ ,  $\text{NaNO}_3$ ,  $\text{AgNO}_3$  und  $\text{TNO}_3$  und von einigen organischen Nitraten. Hartley schreibt das Band der  $\text{NO}_2$ -Gruppe des Nitrates zu (H. Kayzers Handbuch der Spektroskopie 3. p. 228).

2) Dieses negative Resultat konnte bei anderer Schichtdicke auch anders ausfallen. Nimmt man statt eines klaren Kristalls von  $\text{KNO}_3$  eine weiße durchscheinende Platte (Spektrum bei  $15^\circ$  Fig. 9, VIII), so

### Einfluß der chemischen Zusammensetzung auf die Absorption.

Die Tatsache, daß beim Übergang vom festen in den flüssigen Zustand die Absorptionsspektren einiger Salze eine sprungweise Änderung erleiden, die von einer rapiden Änderung der elektrischen Leitfähigkeit begleitet wird, legt den Gedanken nahe, die oben gewonnenen Resultate vom Standpunkte der Ionentheorie aus zu betrachten.

Bekanntlich zeigen viele Salze, die gemeinsame Base oder Säure haben, in Lösungen ähnliche Absorptionsspektren, und zwar um so ähnlichere, je größer die Verdünnung ist. Andererseits gilt das Beersche Gesetz, nach welchem die Absorption in geometrischer Reihe wächst, wenn die Konzentration in arithmetischer zunimmt, für viele verdünnte Salze nicht mehr. Diese beiden Tatsachen lassen sich durch die Annahme erklären, daß außer den Molekülen auch den Ionen eine Absorptionsfähigkeit zukommt. Ist ein Ion eines Salzes farblos, so zeigt die verdünnte Lösung die Absorption des anderen, und die Salze, die es gemeinsam haben, weisen gleiche Spektren auf. Diese Theorie ist von Ostwald entwickelt worden und seitdem sind zahlreiche Arbeiten erschienen, die experimentelle Beweise dazu lieferten, es sind aber auch Tatsachen bekannt, die ihr zu widersprechen scheinen.<sup>1)</sup>

Man konnte erwarten, daß auch bei geschmolzenen Salzen ähnliche Regelmäßigkeiten, wie in Lösungen, auftreten werden. Es fällt in der Tat auf, daß bei Alkalisalzen alle Chloride nahezu gleiche Absorption zeigen, also wohl diejenige des Chlors, Bromide — die des Broms. Dagegen zeigen die Sulfate verschiedene Absorption, wie es nach der Beobachtung von Müller<sup>2)</sup> und Martens<sup>3)</sup>, daß das Sulfation in dem unter-

verschwindet schon bei geringer Temperaturerhöhung die bei 15° noch durchgelassene Liniengruppe (265  $\mu\mu$ ) und der beim klaren Kristall beobachtete Sprung kommt gar nicht zum Vorschein. Die Beobachtung von Hartley (vgl. Ann. 1, p. 107) spricht dafür, daß beim  $\text{AgNO}_3$  solche Verhältnisse vorliegen.

1) Literaturangabe in Kayzers Handbuch der Spektroskopie 3. p. 109; vgl. auch S. Rudolf: Die Lichtabsorption in Lösungen vom Standpunkt der Dissoziationstheorie. Stuttgart 1904.

2) E. Müller, Ann. d. Phys. 12. p. 767. 1903.

3) F. F. Martens, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 4. p. 141. 1902.

suchten Gebiet farblos ist, zu erwarten war; bei farblosem Anion muß die im ersten Falle verdeckte Verschiedenheit der Absorption des Kations zutage treten. Diese Regelmäßigkeit beschränkt sich aber nur auf eine Gruppe. Die Chloride der Erdalkalimetalle weichen schon von den Alkalichloriden um Beträge ab, die die Fehlergrenze beträchtlich überschreiten.

Im allgemeinen haben die beiden Bestandteile des Salzes Einfluß auf die Lage der Endabsorption. Es lassen sich aus der Fig. 2 für Absorptionsspektren geschmolzener Salze folgende Regelmäßigkeiten ableiten.

I. Die Salze von schweren Metallen absorbieren mehr als die Salze von Alkali- und Erdalkalimetallen.

II. Bei gleichem Metall absorbiert das Sulfat am wenigsten, dann folgen Chlorid und Bromid, Jodid und Nitrat absorbieren am meisten. Für Silbersalze stimmt allerdings die letzte Regel nicht: Nitrat scheint, auf dieselbe Temperatur extrapoliert, weniger zu absorbieren als Chlorid.

III. Bei gleichbleibender Säure liegt für Metalle aus einer Gruppe des Mendelejeffschen Systems die Endabsorption desto mehr nach der Seite der größeren Wellenlängen, je größer das Atomgewicht des Metalles ist.

#### Zusammenhang zwischen Absorption und Dispersion.

Pulfrich<sup>1)</sup> hat zuerst darauf hingewiesen, daß die Änderung der Brechungsexponenten mit der Temperatur nicht nur durch die Änderung der Dichte, sondern auch durch die Verschiebung der Lage des Absorptionsstreifens bedingt wird. Die Ketteler-Helmholtzsche Dispersionsformel lautet:

$$n^2 = 1 + \sum \frac{m_n \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_n^2},$$

wo  $n$  Brechungsexponent,  $1 + \sum m_n$  Dielektrizitätskonstante (für sehr langsame Perioden) und  $\lambda_n$  Wellenlänge des Absorptionsstreifens bedeutet. Da die Dielektrizitätskonstante mit steigender Temperatur bei festen Körpern abnimmt (für Gläser ist die Dielektrizitätskonstante der Dichte proportional) und die Wellenlänge  $\lambda_n$  zunimmt, so beobachtet man, je nach-

1) C. Pulfrich, Wied. Ann. 45. p. 605. 1892.

dem die erste oder die zweite Wirkung überwiegt, die Abnahme oder die Zunahme des Brechungsexponenten.

Martens und Micheli<sup>1)</sup> berechnen aus der Änderung des Brechungsexponenten mit der Temperatur die Änderung der Konstanten der Dispersionsformel. Es ergibt sich, daß der ultraviolette Absorptionsstreifen für Quarz, Quarzglas und Flußspat sich nach rot verschiebt und zwar um  $0,6 \mu\mu$  bei  $100^\circ$  Temperaturerhöhung.

Andererseits hat Koenigsberger<sup>2)</sup> für verschiedene Körper direkt die Änderung des Extinktionskoeffizienten mit der Temperatur spektralphotometrisch gemessen. Für Flintglas ergibt sich, daß die Stelle gleicher Absorption bei  $100^\circ$  Temperaturerhöhung um ca.  $30 \mu\mu$  sich nach den größeren Wellenlängen hin verschiebt.

Um die beiden Resultate miteinander vergleichen zu können, muß man folgendes berücksichtigen.

Es ist oben gezeigt worden, daß für dieselbe Temperaturerhöhung die Verschiebung der Stelle gleicher Absorption für geschmolzene Salze in Wellenlängen ausgedrückt, im ultravioletten Gebiet geringer ist, als im sichtbaren, und daß diese Verschiebung einen von der Wellenlänge unabhängigen Wert annimmt, wenn man statt in Wellenlängen, in Schwingungs-

Tabelle II.

	Lage der Absorption in $\mu\mu$	Verschiebung der Absorption für $100^\circ$	
		in $\mu\mu$	in $\frac{1}{\mu\mu} \cdot 10^5$
KNO <sub>3</sub> . . . .	260	8	10
KBr . . . .	244	8	14
NaBr . . . .			
Flintglas . . .	500	30	12
Quarzglas . . .	107	0,6	5
Quarz . . . .			
Flußpat . . . .	95	0,6	6

1) F. F. Martens u. F. J. Micheli, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 6. p. 311. 1904.

2) J. Koenigsberger, l. c.

zahlen rechnet. Es liegt nahe, auch für feste Körper in Schwingungszahlen zu rechnen. Stellt man die für festes NaBr, KBr und  $\text{KNO}_3$  oben gefundenen Werte (vgl. Fig. 3) des Temperaturkoeffizienten mit den von Koenigsberger und Martens und Micheli gefundenen zusammen, so bekommt man vorstehende Tab. 2.

Man ersieht aus dieser Zahlen, daß die Verschiebung des Absorptionsstreifens bei Quarz, Quarzglas und Flußspat von derselben Größenordnung ist, wie die Verschiebung der Stelle gleicher Absorption für Flintglas und feste und geschmolzene Salze. Es liegt deshalb nahe, die oben beobachtete Verschiebung der Stelle gleicher Absorption größtenteils dem Vorrücken des Absorptionsstreifens zuzuschreiben. Ob dabei auch eine Verbreiterung des Streifens zu der Verschiebung beiträgt, läßt sich vorläufig nicht sagen.

Die von Voigt<sup>1)</sup> und Erfle<sup>2)</sup> entwickelte Elektronentheorie des Lichtes führt unter gewissen beschränkenden Annahmen über die Werte der darin auftretenden Parameter zu einer Formel, welche gestattet, aus dem Verhalten der Dichte und des Brechungsexponenten in dem merklich absorptionsfreien Gebiet die durch Temperatursteigerung verursachte Verschiebung des Absorptionsstreifens zu bestimmen. Die Anwendung dieser Formel auf mehrere feste und flüssige Körper führt zu dem Resultat, daß eine Temperatursteigerung bei konstantem Druck eine Verschiebung des Absorptionsstreifens nach den größeren Wellenlängen hin für feste Körper, und nach den kleineren für Flüssigkeiten bewirkt. Dieses Resultat ist für feste Körper in Einklang mit der Beobachtung.

Zu der beiläufigen Bemerkung von Koenigsberger, daß die Flüssigkeiten sich den festen Körpern analog verhalten, sagt Voigt<sup>1)</sup>: „Ein solches Verhalten würde überraschen, . . . Immerhin wäre es mit der Theorie nicht unvereinbar . . .“ da erstens die für Vereinfachung der Formel gemachten Annahmen für Flüssigkeiten auch nicht zutreffen könnten und man zweitens aus der Formel im Falle mehrerer Absorptionsstreifen das

1) W. Voigt, l. c., p. 487.

2) H. Erfle, l. c.



mittlere Verhalten der maßgebenden Konstante berechnet, „mit diesem mittleren ist ein entgegengesetztes Verhalten einer Elektronengattung (die vielleicht einem in der Flüssigkeit aufgelösten Farbstoff zugehört) wohl verträglich“. Bei den Lösungen sind bekanntlich Verschiebungen nach rot und violett beobachtet. In den geschmolzenen Salzen hat man eine Flüssigkeit, die nicht Lösung ist und deren Absorption bei Temperatursteigerung nach rot rückt.

#### Zusammenfassung.

I. Es wurden die Endabsorptionen für 30 anorganische Salze in geschmolzenem Zustand bestimmt.

II. Die Endabsorption der geschmolzenen Salze verschiebt sich bei 100° Temperaturerhöhung um ca.  $10$  bis  $20 \cdot 10^5$   $1/\mu\mu$  nach den größeren Wellenlängen.

III. Die Größe der Verschiebung für dieselbe Temperaturerhöhung in Wellenlängen ausgedrückt wächst mit der Wellenlänge, in Schwingungszahlen ausgedrückt ist sie von der Wellenlänge unabhängig.

IV. Die Endabsorption einiger Salze in festem Zustand verschiebt sich bei Temperaturerhöhung in derselben Richtung und um einen Betrag von derselben Größenordnung, wie in geschmolzenem Zustand.

V. Beim Übergang vom festen zum flüssigen Zustand rückt die Endabsorption bei einigen Salzen sprunghaft um ca.  $80 \cdot 10^5$   $1/\mu\mu$  nach den größeren Wellenlängen hin.

Zum Schluß sei es mir gestattet, Hrn. Dr. R. Küch für die Anregung zu dieser Arbeit und seine vielfache tätige Teilnahme an ihrem Fortgang meinen besten Dank auszusprechen.

Hanau, im Juli 1908.

(Eingegangen 23. Juli 1908.)



### 6. Über eine neue Bestimmung der Pole von Stabmagneten; von H. Ruoss.

E. Riecke<sup>1)</sup> hat zuerst gezeigt, daß ein Stabmagnet in seiner Fernwirkung durch einen mathematischen Magnet<sup>2)</sup> ersetzt werden kann, dessen Pole aber nicht — wie wohl früher allgemein angenommen — mit den magnetischen Schwerpunkten zusammenfallen.

Diese Schwerpunkte werden erhalten, wenn man in sämtlichen Punkten des Magnetstabs statt den Mengen des dort vorhandenen freien Magnetismus ebensogroße Massen angebracht denkt und von diesen Massenpunkten den Schwerpunkt sucht.

Diese Schwerpunkte können nach Riecke experimentell überhaupt nicht bestimmt werden, ihre Ermittlung durch Berechnung setzt voraus die Kenntniss der Verteilung des freien Magnetismus an der Oberfläche des Stabmagnets. Unter Zugrundelegung der Theorie von Biot und van Rees nach welcher der freie Magnetismus  $x$  cm von der Mitte eines Stabmagnets, dessen äußere Länge  $2L$ ):

$$y = b \log \text{nat } \mu(\mu^{+x} - \mu^{-x}) dx,$$

der Magnetismus an den beiden Enden:

$$a - b(\mu^L + \mu^{-L})$$

ist, wo  $a$ ,  $b$ ,  $\mu$  Konstante sind, lassen sich z. B. die Schwerpunkte bestimmen. Für einen der van Reesschen Stäbe, deren Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $\mu$  bekannt sind, findet man z. B. als Entfernung der Schwerpunkte von der Mitte  $\pm 0,717$  der äußeren

1) E. Riecke, Pogg. Ann. 149. p. 62. 1873; Wied. Ann. 8. p. 300. 1879.

2) Mathematischer Magnet ist ein ideeller Magnet mit nur zwei magnetischen Punkten.

3) J. B. Biot, Traité de physique 3. p. 76; van Rees, Pogg. Ann. 70. 1847.

Stablänge. Die Pole, die sich experimentell bestimmen lassen und die den natürlichen Magnet bei der Fernwirkung ersetzen, nennt Riecke „äquivalente Pole“.

Die Untersuchungen von Riecke gehen aus vom Potential eines Punktes in bezug auf den Stabmagnet, dieses Potential wird gleichgesetzt dem Potential des gesuchten mathematischen Magnets. Beide Potentiale werden in unendlichen Reihen dargestellt und aus ihnen die Stärke und der Abstand der äquivalenten Pole von der Mitte entnommen.

F. Kohlrausch<sup>1)</sup> hat die Untersuchungen von Riecke wieder aufgenommen, indem er nicht die Potentiale, sondern die magnetischen Fernkräfte selbst in Betracht zog und für den freien Magnetismus obige Exponentialfunktion den Berechnungen zugrunde legte. Er findet, was für unsere Darstellung wichtig ist, daß die Verteilung des freien Magnetismus auch durch die weit einfachere Funktion  $y = \pm c x^2 dx$  gegeben werden kann. Sowohl Riecke als Kohlrausch gelangen bei Aufstellung des Potentials bzw. der magnetischen Kraft nicht auf die magnetischen Schwerpunkte und, wie sich aus dem folgenden ergibt, deshalb nicht, weil sie die Frage des Ersatzes der einen Hälfte des Stabmagnets durch einen einzigen Pol nicht in Rechnung ziehen. Die Lage der Schwerpunkte wird bei ihnen nur ermittelt, um zu zeigen, daß diese Punkte nicht mit den äquivalenten Polen zusammenfallen. Der Ersatz des natürlichen Magnets gilt nur für die Fernwirkung auf solche Punkte, bei denen die 5. Potenz der Entfernung  $e$  von der Stabmitte gegen die 5. Potenz der halben äußeren Länge  $L$  des Stabmagnets vernachlässigt werden kann; bei welcher Entfernung dies aber eintritt, wie groß die Fehler bei den einzelnen Entfernungen  $e$  sind, darüber geben uns die genannten Abhandlungen keinen Aufschluß; auch könnte man mit den unendlichen Reihen wegen teilweise schlechter Konvergenz die Fehler für kleine Entfernungen gar nicht ermitteln.

Unsere Abhandlung zerfällt in drei Teile:

Im ersten Teil betrachten wir einen Lineararmagnet und suchen ohne Kenntnis des Verteilungsgesetzes des freien Magnetismus den gleichwirkenden mathematischen Magnet,

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 31. p. 609. 1887.

wobei sich merkwürdigerweise zwei mathematische Ersatzmagnete ergeben.

Im zweiten Teil werden unter Anwendung des Verteilungsgesetzes<sup>1)</sup>  $y = \pm c x^2$  die magnetischen Schwerpunkte und äquivalenten Pole bestimmt.

Im dritten Teil wird (ohne jede Vernachlässigung kleiner Größen) für jede Entfernung  $e$  der genau gleichwirkende mathematische Magnet ermittelt.

Im vierten Teil wird auf Grund der Rechnung eine neue Methode der Polbestimmung angegeben.

Wir schicken voraus:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{x}{e} \cos \varphi + \left(\frac{x}{e}\right)^2}}$$

gibt nach Potenzen von  $(x^2/e^2 - 2(x/e) \cos \varphi)$  entwickelt und darauf nach Potenzen von  $x/e$  geordnet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{x}{e} \cos \varphi + \frac{x^2}{e^2}}} &= 1 + (\cos \varphi) \frac{x}{e} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi\right) \frac{x^2}{e^2} \\ &+ \left(-\frac{3}{2} \cos \varphi + \frac{5}{2} \cos^3 \varphi\right) \frac{x^3}{e^3} + \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \varphi + \frac{35}{8} \cos^4 \varphi\right) \frac{x^4}{e^4} \\ &+ \left(\frac{15}{8} \cos \varphi - \frac{35}{4} \cos^3 \varphi + \frac{63}{8} \cos^5 \varphi\right) \frac{x^5}{e^5} \\ &+ \left(-\frac{5}{16} + \frac{105}{16} \cos^2 \varphi - \frac{315}{16} \cos^4 \varphi\right) \frac{x^6}{e^6} + \dots \\ &\equiv 1 + A_1 \frac{x}{e} + A_2 \frac{x^2}{e^2} + A_3 \frac{x^3}{e^3} + A_4 \frac{x^4}{e^4} + \dots, \end{aligned}$$

wo die  $A$  obige Funktionen von  $\varphi$  sind.

Ist  $\mu = f(x) dx$  der freie Magnetismus eines Linearmagnets  $x$  cm von der Mitte, so erhält man für das Potential des durch  $\varphi$  und  $r$  gegebenen Punktes in bezug auf die eine Hälfte des Stabmagnets:

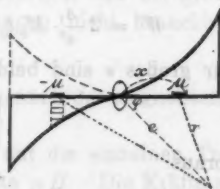


Fig. 1.

1) Die Exponentialfunktion ergibt dieselben Resultate, erschwert aber die Übersicht und macht die Ausrechnung, wenn auch nicht unmöglich, doch sehr umständlich.

$$w = \int \frac{\mu}{r} = \int \frac{\mu}{\sqrt{x^2 - 2xe \cos \varphi + e^2}} = \frac{1}{e} \int_{x=0}^{x=L} \frac{\mu}{\sqrt{1 - 2\frac{x}{e} \cos \varphi + \frac{x^2}{e^2}}} \\ = \frac{1}{e} \sum \mu + \frac{A_1}{e^2} \sum \mu x + \frac{A_2}{e^3} \sum \mu x^2 + \dots$$

Ein mathematischer Magnet mit Stärke  $\pm M$  und dem Polabstand  $\pm l$  von 0 gibt das Potential

$$w' = \frac{1}{e} \frac{M}{\sqrt{\frac{l^2}{e^2} - 2\frac{l}{e} \cos \varphi + 1}} = \frac{1}{e} M + \frac{A_1}{e^2} M l + \frac{A_2}{e^3} M l^2 + \dots$$

Bei großem  $e$  sind beide gleich, wenn

$$\begin{cases} M = \sum \mu, \\ M l = \sum \mu x, \end{cases}$$

woraus

$$l = \frac{\sum \mu x}{\sum \mu}.$$

Die durch  $\pm l$  bestimmten Punkte sind die magnetischen Schwerpunkte.

Beide Potentiale stimmen überein, wenn die Glieder mit zweiter und mit den höheren Potenzen des Quotienten  $\frac{\text{Länge}}{\text{Entfernung}}$  vernachlässigt werden dürfen.

Das Potential beider Hälften des natürlichen Magnets wird:

$$W = 2 \frac{A_1}{e^2} \sum \mu x + 2 \frac{A_2}{e^3} \sum \mu x^2 + 2 \frac{A_3}{e^4} \sum \mu x^3 + \dots$$

Ein mathematischer Magnet mit Stärke  $\pm M_0$  und Polabstand  $\pm l_0$  gibt das Potential:

$$W' = 2 \frac{A_1}{e^2} M_0 l_0 + 2 \frac{A_2}{e^3} M_0 l_0^2 + 2 \frac{A_3}{e^4} M_0 l_0^3 + \dots$$

Für großes  $e$  sind beide gleich, wenn:

$$\begin{cases} M_0 l_0 = \sum \mu x, \\ M_0 l_0^2 = \sum \mu x^2, \end{cases}$$

woraus

$$l_0^2 = \frac{\sum \mu x^2}{\sum \mu x}, \quad M_0 = \frac{\sum \mu x}{l_0},$$

Nach vorigem daher

$$M_0 = \frac{l \cdot \sum \mu}{l_0},$$

also nicht gleich dem Gesamtmagnetismus.

Die durch  $l_0$  bestimmten Punkte heißen äquivalente Pole. Beide Potentiale stimmen überein, wenn die Glieder 5. und höherer Potenzen des Quotienten  $\frac{\text{Länge}}{\text{Entfernung}}$  vernachlässigt werden können.

Ein natürlicher Magnet kann also bei Wirkung in großer Entfernung in doppelter Weise durch einen mathematischen ersetzt werden:

I. Man bringt in den Schwerpunkten, im Abstand

$$l = \pm \frac{\sum \mu x}{\sum \mu},$$

den ganzen Magnetismus  $M = \pm \sum \mu$  an.

II. Man bringt in den äquivalenten Polen, im Abstand

$$l_0 = + \sqrt{\frac{\sum \mu x^3}{\sum \mu x}},$$

den Magnetismus

$$M_0 = \pm \frac{\sum \mu x}{l_0} = \frac{l \sum \mu}{l_0}$$

an (also nicht den ganzen Magnetismus).

In beiden Fällen hat der mathematische Magnet gleiches Moment mit dem natürlichen. Der erste Ersatz setzt voraus, daß die 2. Potenz der halben Stablänge vernachlässigt werden kann gegen die 2. Potenz der Entfernung; der zweite Ersatz, daß die 5. Potenz der halben Stablänge gegen die 5. Potenz der Entfernung vernachlässigt werden kann. Der zweite Ersatz ist also ein weit vollständiger als der erste.

Die Doppeldeutigkeit des Ersatzes bei großer Entfernung kommt experimentell dadurch zum Ausdruck, daß bei großer Entfernung die späteren Polbestimmungen nicht brauchbare Werte liefern.

Homogenes magnetisches Feld, Entbehrlichkeit der magnetischen Schwerpunkte.

Ist  $H$  die Feldstärke, so wirken auf die einzelnen Teile des natürlichen Magnets parallele Kräfte  $\mu H$ . Die Kräfte auf die eine Hälfte des Stabmagnets können dann durch eine Resultante ersetzt werden, die im magnetischen Schwerpunkt angreift und  $= H \cdot \sum \mu$  ist, ebenso ist es mit den Kräften auf die andere Hälfte. Man erhält also ein Kräftepaar, das identisch ist mit dem Kräftepaar, das der mathematische Magnet I

liefert. Nun kann aber ein Kräftepaar durch ein anderes ersetzt werden, das mit ihm gleiches statisches Moment hat, ein solches ist aber das Kräftepaar des mathematischen Magnets II.

*Auch im homogenen Felde kann man also den natürlichen Magnet durch den mathematischen Magnet II ersetzen, dessen Pole mit den äquivalenten Polen des Magnets zusammenfallen.*

Spricht man also von Polen, so versteht man am besten darunter die äquivalenten Pole und unter Polstärke die Zahl der magnetischen Einheiten dieser Pole.

Lage der magnetischen Schwerpunkte und der äquivalenten Pole; Pole eines mathematischen Magnets von genau gleicher Wirkung mit dem natürlichen Magnet.

$$\mu = \pm c x^2 dx \text{ gibt:}$$

$$\text{Gesamtmagnetismus } \pm \sum \mu = \pm \frac{c L^3}{3},$$

$$\text{Magnetisches Moment der einen Hälfte } \frac{c L^4}{4}.$$

Für die Schwerpunkte:

$$M = \frac{c L^3}{3}, \quad l = \pm \frac{3}{4} L.$$

Für die äquivalenten Pole:

$$M_0 = \frac{3}{8} c L^3 \sqrt{6} = \frac{3}{8} \sqrt{6} \left( \frac{c L^3}{3} \right) = 9,19$$

des vorhandenen Magnetismus:

$$l_0 = \frac{1}{3} \sqrt{6} L = 0,8165 L.$$

Um die Fehler, die bei Abnahme der äquivalenten Pole auftreten können, zu erfahren, sucht man die Feldstärke für einen Punkt in der ersten Gauss'schen Hauptlage, also in der Achse des Magnets; diese wird für die eine Hälfte:

$$\int \frac{\mu}{(e-x)^2} = \int_0^L \frac{c x^2 dx}{(e-x)^2} = 2 e c \log(e-x) + \frac{e^2 \cdot c}{e-x} + c x \quad \left| \begin{array}{l} x=L \\ x=0 \end{array} \right.$$

Für die andere Hälfte:

$$-\int_0^L \frac{c x^2 dx}{(e+x)^2} = 2 e c \log(e+x) + \frac{e^2 \cdot c}{e+x} - c x \quad \left| \begin{array}{l} x=L \\ x=0 \end{array} \right.$$

woraus die Gesamtfeldstärke

$$k = 2e \cdot c \frac{L^3}{e^3 - L^3} - 2e \cdot c \log \frac{e^3}{e^3 - L^3}.$$

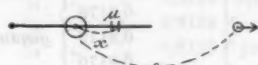


Fig. 2.

Ein mathematischer Magnet mit Stärke  $\pm M$  und Polabstand  $\pm l$  hat die Feldstärke:

$$\frac{M}{(e-l)^2} - \frac{M}{(e+l)^2} = \frac{4elM}{(e^3 - l^3)^2};$$

soll er mit dem natürlichen gleiches Moment haben, so muß  $Ml = cL^4/4$  sein, also die Feldstärke  $(ecL^4/(e^3 - l^3)^2)$ . Die Gleichheit beider Feldstärken gibt:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{e^3}{L^3} - \frac{l^3}{L^3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{e^3}{L^3} - 1} - \log \frac{\frac{e^3}{L^3}}{\frac{e^3}{L^3} - 1}$$

oder

$$(1) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{e^3}{L^3} - \frac{l^3}{L^3} \right)^{-2} = \left( \frac{e^3}{L^3} - 1 \right)^{-1} - \log \frac{\frac{e^3}{L^3}}{\frac{e^3}{L^3} - 1}.$$

Zu jedem Wert von  $e/L$  gibt diese Gleichung einen Wert von  $l/L$ . Dieser Quotient heißt nach Kohlrausch<sup>1)</sup> *Polabstandsmodul*.

Führt man unendliche Reihen ein und setzt  $\varepsilon = (L/e)^3$ , so ergibt sich

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 \left( 1 - \varepsilon \frac{l^3}{L^3} \right)^{-2} = \varepsilon(1 - \varepsilon)^{-1} + \log(1 - \varepsilon),$$

daher

$$1 - \varepsilon \frac{l^3}{L^3} = \left( 1 + \frac{4}{3} \varepsilon + \frac{3}{2} \varepsilon^2 + \frac{8}{5} \varepsilon^3 + \frac{5}{3} \varepsilon^4 \right)^{-1/2},$$

woraus

$$(2) \quad \frac{l^3}{L^3} = \frac{2}{3} + 0,08333 \varepsilon + 0,04074 \varepsilon^2 + 0,02538 \varepsilon^3 + \dots$$

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 22. p. 411. 1884.

Gleichung (1) oder (2) ergibt:

Für  $\sqrt{\varepsilon} = L/\varepsilon = 1/2$  wird  $l/L = 0,8309$

"	"	"	$1/3$	"	"	0,8225	Modul des mathematischen Magnets von genau gleicher Feldstärke,
"	"	"	$1/4$	"	"	0,8198	
"	"	"	$1/5$	"	"	0,8179	
"	"	"	$1/6$	"	"	0,8173	
"	"	"	$1/10$	"	"	0,8170	
"	"	"	$1/20$	"	"	0,8168	

während der Modul der äquivalenten Pole  $l/L = 0,816497$  ist

Für die zweite Gauss'sche Hauptlage ist die Feldstärke



Fig. 3.

$$\begin{aligned}
 k &= 2 \int \frac{\mu x}{r^3} = 2c \int_0^L \frac{x^3 dx}{(x^2 + e^2) \sqrt{x^2 + e^2}} \\
 &= 2c \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + e^2}} - 2c \int \frac{e^2 x dx}{(x^2 + e^2) \sqrt{x^2 + e^2}} \\
 &= 2c \sqrt{x^2 + e^2} + \frac{2ce^2}{\sqrt{x^2 + e^2}} \Big|_0^L \\
 &= 2c \sqrt{L^2 + e^2} + \frac{2e^2 \cdot c}{\sqrt{L^2 + e^2}} - 4ce.
 \end{aligned}$$

Ein mathematischer Magnet mit Stärke  $\pm M$  und Polabstand  $\pm l$  hat dieselbe Feldstärke, wenn

$$k = 2 \frac{Ml}{(l^2 + e^2)^{3/2}};$$

soll er mit dem natürlichen gleiches Moment haben, so muß  $Ml = cL^4/4$  sein.

Für den Polabstand  $\pm l$  des genau gleich wirkenden mathematischen Magnets ist also

$$(3) \quad \frac{1}{4} \left( \frac{l^2}{L^2} + \frac{e^2}{L^2} \right)^{-3/2} = \left( 1 + \frac{e^2}{L^2} \right)^{1/2} + \frac{e^2}{L^2} \left( 1 + \frac{e^2}{L^2} \right)^{-1/2} - \frac{2e}{L}.$$

Diese Gleichung gibt wieder zu jedem Wert von  $e/L$  einen Wert von  $l/L$ . Führt man unendliche Reihen ein und setzt wieder  $\varepsilon = (L/e)^2$ , so ergibt sich:

$$\frac{1}{4} \varepsilon^2 \left( 1 + \varepsilon \frac{l^2}{L^2} \right)^{-3/2} = (1 + \varepsilon)^{1/2} + (1 + \varepsilon)^{-1/2} - 2,$$

woraus

$$1 + \varepsilon \frac{l^2}{L^2} = \left( 1 - \varepsilon + \frac{15}{16} \varepsilon^2 - \frac{7}{8} \varepsilon^3 + \frac{105}{128} \varepsilon^4 + \dots \right)^{-1/2},$$

$$(4) \quad \frac{l^2}{L^2} = \frac{2}{\varepsilon} - 0,06944 \varepsilon + 0,03550 \varepsilon^2 - 0,02264 \varepsilon^3 + \dots$$



Gleichung (3) oder (4) ergibt:

Für $\sqrt{e} = L/e = 1/2$ wird $l/L = 0,8070$	
" " $1/2$ " "	0,8120
" " $1/4$ " "	0,8139
" " $1/6$ " "	0,8154
" " $1/8$ " "	0,8159
" " $1/10$ " "	0,8161
" " $1/20$ " "	0,8164

Modul des mathematischen  
Magnetes von  
genau gleicher Feldstärke,

während der Modul der äquivalenten Pole

$$\frac{l}{L} = 0,816497 \text{ ist.}$$

Fehler in der Annahme der Ersatzmagnete I und II.

Die Feldstärke des natürlichen Magnetes in der ersten Hauptlage ist:

$$k = 2e \cdot c \frac{1}{e^2 - 1} - 2e \cdot c \log \frac{e^2}{L^2 - 1},$$

die des Ersatzmagnetes I mit den Schwerpunkten:

$$k_I = \frac{e \cdot e \cdot L^4}{\left[e^2 - \left(\frac{3}{4}L\right)^2\right]^2} = \frac{e \cdot e}{\left(\frac{e^2}{L^2} - \frac{9}{16}\right)^2}$$

und des Ersatzmagnetes II mit den äquivalenten Polen

$$k_{II} = \frac{e \cdot e \cdot L^4}{\left(e^2 - \frac{2}{3}L^2\right)^2} = \frac{e \cdot e}{\left(\frac{e^2}{L^2} - \frac{2}{3}\right)^2}$$

Hieraus für

$e/L = 1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/10$
wird $k = e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 913$	$e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 144$	$e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 42,5$	$e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 1,01$
$k_{II} = e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 900$ zu wenig 1,4 %	$e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 144$	$e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 42,5$	$e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 1,01$
$k_I = e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 846$ zu wenig 7,4 %	$e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 140$ zu wenig 2,7 %	$e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 41,9$ zu wenig 1,4 %	$e \cdot c \cdot 10^{-4} \cdot 1,01$

Beschreibt man also um die Stabmitte mit der 5 fachen Stablänge einen Kreis ( $e/L = 10$ ), so werden die drei Feld-

stärken für Punkte außerhalb des Kreises einander gleich, d. h. die absoluten Unterschiede der drei Feldstärken sind hier von solcher Größenordnung, daß sie experimentell nicht mehr wahrnehmbar<sup>1)</sup> sein können (z. B. für  $L/e = \frac{1}{10}$  ist  $k - k_1 < e \cdot 10^{-4} \cdot 0,001$ ).

Der doppelte Ersatz gibt sich hier, wie schon früher gesagt, dadurch kund, daß eine experimentelle Bestimmung der Pole ausgeschlossen ist. Das wichtigste Ergebnis aus diesen Rechnungen ist:

1. Verwendet man zur Bestimmung der äquivalenten Pole die Messungen in der ersten Hauptlage, so erhält man Werte für den Polabstandsmodul, die *alle* etwas größer sind als der gesuchte Modul, mit ihm aber schon für  $L/e \leq \frac{1}{10}$  auf zwei Dezimalen übereinstimmen.

2. Bei Messungen in der zweiten Hauptlage sind die Werte alle etwas kleiner als der gesuchte.

3. Messungen mit  $L/e \geq \frac{1}{10}$  sind für Polbestimmungen ungeeignet.

4. Nimmt man Messungen in der ersten und zweiten Hauptlage vor, so kommt man dem wahren Wert des Moduls sogar bei kleinen Entfernungen am nächsten, z. B.

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{ Hauptlage: } L/e = \frac{1}{10} \text{ gibt } l/L = 0,8225 \\ 2. \text{ Hauptlage: } L/e = \frac{1}{10} \text{ gibt } l/L = 0,8120 \end{array} \right\} \text{ Mittel } 0,817.$$

#### Polbestimmung.

F. Kohlrausch<sup>2)</sup> hat für 14 Magnete nach drei verschiedenen Methoden (der Magnet lenkt eine kleine Nadel ab, er wirkt auf zwei Magnetometer, er wird durch elektrische Ströme abgelenkt), die Pole bestimmt und findet  $l/L = 0,81$  bis  $0,86$ ; weitere Bestimmungen liegen vor von Helmholtz<sup>3)</sup>, danach ist  $l/L = 0,84$  bis  $0,86$ .

Hieraus kommt F. Kohlrausch zu dem Schlusse:

„Berücksichtigt man die verhältnismäßig großen Schwierigkeiten und Fehler solcher Messungen, ohne welche vielleicht

1) Für recht kräftige Magnete und Spiegelablesungen mag dies erst bei noch größerer Entfernung zutreffen.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 22. p. 411. 1884.

3) H. v. Helmholtz, Sitzungsber. d. Berliner Akad. 1883.

die Unterschiede noch kleiner ausgefallen sein würden, so darf man mit einiger Bestimmtheit behaupten, daß der Wert  $0,83 = \frac{8}{10}$  für gewöhnlich gestreckte Magnete der Wahrheit immer ziemlich nahe kommt. Fehler, welche 5 Proz. der Länge erreichen, dürften unter dieser Annahme niemals zu befürchten sein.“

Daß es sich indessen auch bei ganz gewöhnlichen Stabmagneten um ein um 5 Proz. größeres  $l/L$  handeln kann, ergibt sich aus Messungen, die ich der praktischen Physik von Kohlrausch selbst entnehme, und aus denen ich  $k$  berechne. Nach p. 324 ist für einen Stab  $10 \times 1,25 \times 1,25$  cm in der ersten Hauptlage bei den Entfernungen (Stabmitte bis Bussolenmitte)

$$a = 30 \text{ bzw. } 40 \text{ cm,}$$

die Ablenkung

$$\varphi = 22,54 \text{ bzw. } 9,77^\circ;$$

also nach p. 358

$$\eta = 36,3 \text{ und da } \eta = \frac{1}{2}(L^2 - \frac{1}{2}l^2),$$

wo

$$l = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,7;$$

so folgt

$$L = \sqrt{76,94} = 8,77; \text{ also Modul } 0,877;$$

auch meine Messungen ergaben, daß der Polabstandsmodul im allgemeinen zu klein angenommen wird.

Da die Art der Magnetisierung selbstverständlich von Einfluß auf die Lage der Pole ist und Berührung mit Eisen ebenfalls eine Änderung der Polage bewirken kann, so ist es gut, die Magnete vor der Polbestimmung von neuem zu magnetisieren oder umzumagnetisieren. Ich bediene mich hierbei einer 60 cm langen Spule mit zwei Wicklungen Millimeterdraht. Den 20 oder weniger cm langen Magnetstab bringt man in die Mitte der Spule und schickt durch den Draht etwa 1 Sek. (oder einen Bruchteil einer Sekunde) lang 20 Amp. hindurch; die Feldstärke der Spule ca.  $H = 250$  ist dann im Innern auf eine Länge von 20 cm parallel und konstant und bewirkt magnetische Sättigung; bei weniger Ampere erhält man auch schwächere Magnete. Nach Belieben kann so in einer Sekunde ein Stab magnetisiert und ummagnetisiert werden.

1. Polbestimmung aus zwei Messungen in der ersten Gauss'schen Hauptlagerung.<sup>1)</sup>

Für zwei Lagen hat man:

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} a^3 \operatorname{tg} \alpha \left( 1 - \frac{l^3 - \frac{1}{2} l_0^3}{4 a^3} \right),$$

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} a_1^3 \operatorname{tg} \alpha_1 \left( 1 - \frac{l^3 - \frac{1}{2} l_0^3}{4 a_1^3} \right),$$

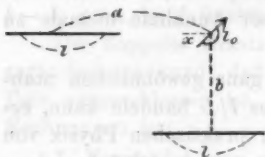


Fig. 4.

wo  $l_0 = \frac{1}{2}$  der Länge der Bussolennadel zu setzen ist.

Elimination von  $M/H$  aus beiden Gleichungen gibt eine Gleichung für  $l^3$ . Um  $l^3$  zu berechnen, kann man auch zuerst bestimmen

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = a^2 a_1^2 \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha - a_1^3 \operatorname{tg} \alpha_1}{a_1^3 \operatorname{tg} \alpha_1 - a^3 \operatorname{tg} \alpha} \\ \text{und erhält dann} \\ l^3 = 2 \eta + \frac{1}{2} l_0^3. \end{array} \right.$$

*Beispiel.* Stab 10 cm lang, Querschnitt ca. 1,5 qcm, Bussolennadel 2 cm lang.

$$a = 30 \text{ cm} \quad \text{bzw.} \quad 40 \text{ cm}$$

gab

$$\alpha = 22,54^\circ \quad \text{bzw.} \quad \alpha_1 = 9,77^\circ.$$

Hier ist

$$l_0 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,7;$$

es wird also

$$\eta = 36,3 \quad \text{und damit} \quad l^3 = 76,55,$$

also

$$l = 8,76 \quad \text{d. h. Modul} \quad \frac{8,76}{10} = 0,88.$$

Betrachten wir diese zwei Messungen vom Gesichtspunkte der früheren Rechnungen, so entspricht der Entfernung 30 und 40 nach p. 120  $\sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{3}$  bzw.  $\frac{1}{4}$ , so daß der gefundene Modul auf zwei Dezimalen richtig sein dürfte. Man hätte sogar die Entfernungen 15 und 20 cm machen können ( $\sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{3}$  bzw.  $\frac{1}{4}$ ) und dieselbe Genauigkeit erwarten dürfen, die größeren Ausschläge hätten dann eine genauere Winkelbestimmung ermöglicht.

1) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik p. 338.

Da man genötigt ist, um brauchbare Werte des Moduls zu erhalten,  $\alpha$  und  $\alpha_1$  wesentlich voneinander verschieden zu nehmen, so fällt, wie das Beispiel zeigt, der Winkel  $\alpha_1$  immer beträchtlich kleiner aus als  $\alpha$ .

Kleine Ausschläge der Bussole lassen sich aber nur mit geringer Genauigkeit bestimmen, so daß  $\alpha$  und  $\alpha_1$  nicht denselben Grad von Genauigkeit besitzen, dazu tritt noch, daß Stäbe von kleinem Querschnitt, wie z. B. ein Stab  $20 \times 0,2 \times 0,4$  cm, wegen geringerer magnetischer Stärke<sup>1)</sup> schon für  $\alpha$  einen kleinen Winkel ergeben. Für Stäbe von kleinem Querschnitt ist daher die Methode ungeeignet, sie liefert dann mit verschiedenem  $a$  ausgeführt, sehr schlecht übereinstimmende Werte des Moduls.

Da die zweite Hauptlage bei gleichen Abständen ( $b = 30$ ,  $b_1 = 40$  cm) noch kleinere Winkel  $\beta$  und  $\beta_1$  liefert als bei der ersten Hauptlage, so kommt sie wohl hier gar nicht in Betracht. Von den genannten Übelständen ist frei die folgende Polbestimmung, welche neu sein dürfte.

## 2. Polbestimmung mit kombinierter erster und zweiter Gauss'scher Hauptlage.

Für eine Messung in der ersten Hauptlage ist:

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} \alpha^3 \operatorname{tg} \alpha \left( 1 - \frac{l_0^2 - \frac{1}{4} l_0^2}{4 \alpha^2} \right)^*.$$

Für eine Messung in der zweiten Hauptlage

$$\frac{M}{H} = b^3 \operatorname{tg} \beta \left( 1 + \frac{l_0^2 - 4 l_0^2}{4 b^2} \right)^{1/2}.$$

In der letzten Gleichung unterdrückt man die von Kohlrausch angegebene Korrektion  $-4 l_0^2$  am besten, und zwar aus folgendem Grunde:

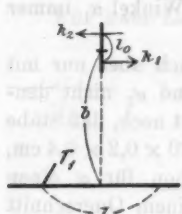
Nach Kohlrausch, p. 553 des praktischen Lehrbuches, ist das Moment der Bussolennadel

$$M = m \cdot m_1 \left( b^2 + \frac{l_0^2}{4} \right)^{-1/2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{l_0^2}{b^2} \right)$$

für den Fall, daß die Nadel im magnetischen Meridian, also

1) Auf 1 qcm Querschnitt können bei einem Stabmagnet höchstens 750 magnetische Einheiten Polstärke kommen.

senkrecht zur Feldstärke des Stabmagnetes steht. Nun sind in dieser Lage in Wirklichkeit die parallelen Kräfte



$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{m m_1 l}{r^3} = m m_1 l \left[ \left( b - \frac{l_0}{2} \right)^2 + \frac{l^2}{4} \right]^{-3/2} \\
 &= m m_1 l \left( b^2 + \frac{l^2}{4} \right)^{-3/2} \left[ 1 + \frac{\frac{l_0^2}{4} - b l_0}{b^2 + \frac{l^2}{4}} \right]^{-3/2} \\
 &= m m_1 l \left( b^2 + \frac{l^2}{4} \right)^{-3/2} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{l_0^2 - 4 b l_0}{4 b^2 + l^2} \right), \\
 &\text{analog} \\
 k_2 &= m m_1 l \left( b^2 + \frac{l^2}{4} \right)^{-3/2} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{l_0^2 + 4 b l_0}{4 b^2 + l^2} \right),
 \end{aligned}$$

Fig. 5.

Das Moment der Nadel ist also

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M} &= k_1 \cdot \frac{l_0}{2} + k_2 \frac{l_0}{2} = l_0 \frac{k_1 + k_2}{2} \\
 &= l_0 m m_1 l \left( b^2 + \frac{l^2}{4} \right)^{-3/2} \cdot \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{l_0^2}{4 b^2 + l^2} \right),
 \end{aligned}$$

also kleiner als der von Kohlrausch angegebene Wert. Ist die Nadel um  $\varphi$  abgelenkt, so ist  $\mathfrak{M} \cos \varphi$  das Moment und dasjenige des Erdmagnetismus  $m_1 H \sin \varphi$ , hieraus

$$\begin{aligned}
 \frac{m l}{H} &= \operatorname{tg} \varphi \left( b^2 + \frac{l^2}{4} \right)^{3/2} \cdot \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{l_0^2}{4 b^2 + l^2} \right]^{-1} \\
 &= \operatorname{tg} \varphi \left[ \left( b^2 + \frac{l^2}{4} \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{l_0^2}{4 b^2 + l^2} \right)^{-2/3} \right]^{3/2} \\
 &= \operatorname{tg} \varphi \left[ \left( b^2 + \frac{l^2}{4} \right) \left( 1 + \frac{l_0^2}{4 b^2 + l^2} \right) \right]^{3/2} = b^3 \operatorname{tg} \varphi \left[ 1 + \frac{l^2 + l_0^2}{4 b^2} \right]^{3/2},
 \end{aligned}$$

also größer als oben von Kohlrausch angegeben und auch dann noch größer, wenn wir in der ganzen Entwicklung die Nadelgröße vernachlässigt hätten. Was die Korrektur  $-\frac{3}{2} \frac{l_0^2}{4 b^2 + l^2}$  in der ersten Hauptlage anlangt, so gibt eine ähnliche Entwicklung, daß ihr genauer Wert

$$-\frac{3}{2} l_0^2 \frac{1 + \frac{l^2}{4 a^2}}{1 - \frac{l^2}{4 a^2}}$$

ist. Setzt man die beiden Werte von  $M/H$  einander gleich, so kommt:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2} \frac{a^3}{b^3} \frac{\left( 1 - \frac{l^2 - \frac{3}{2} l_0^2}{4 a^2} \right)^{3/2}}{\left( 1 + \frac{l^2 + l_0^2}{4 b^2} \right)^{3/2}}.$$

Drückt man alle hier vorkommenden Längen in der äußeren Länge  $L$  des ganzen Stabes aus, setzt also:

$$\frac{l_0}{L} = \lambda, \quad \frac{a}{L} = a_1, \quad \frac{b}{L} = b_1, \quad \frac{l}{L} = x,$$

so wird die letzte Gleichung, in der man zur Abkürzung  $c = \operatorname{tg} \beta / \operatorname{tg} \alpha$  setzen kann:

$$c = \frac{\left(4 a_1^2 + \frac{3}{2} \lambda^2 - x^2\right)^2}{4 a_1 (4 b_1^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Eine Gleichung zur Bestimmung des Moduls  $x$ . Diese Gleichung ist allerdings vom vierten Grad in  $x^2$ , doch läßt sich aus ihr  $x^2$  auf beliebig viele Dezimalen, sogar *einfacher* als bei der Methode 1 ermitteln, da man einen Näherungswert für  $x^2$ , nämlich 0,7 (entsprechend  $x = 0,837$ ) kennt und daher nach einer Methode von Newton<sup>1)</sup> die Wurzel bestimmen kann. Wir setzen zu diesem Zweck

$$f(x^2) \equiv \left(4 a_1^2 + \frac{3}{2} \lambda^2 - x^2\right)^2 - 4 a_1 c (4 b_1^2 + x^2)^{3/2} = 0.$$

Der Näherungswert  $x_1^2 = 0,7$  gibt die Korrektur

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta(x_1^2) &= \frac{-f(x_1^2)}{f'(x_1^2)} = \frac{1}{2} \frac{(4 a_1^2 + \frac{3}{2} \lambda^2 - 0,7)^2 - 4 a_1 c (4 b_1^2 + 0,7)^{3/2}}{(4 a_1^2 + \frac{3}{2} \lambda^2 - 0,7) + 3 a_1 c (4 b_1^2 + 0,7)^{1/2}}, \\ \text{wo} \quad c &= \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad x = \sqrt{0,7 + \Delta(x_1^2)}. \end{aligned} \right.$$

*Anmerkung:* Statt  $\frac{3}{2}$  wäre genauer zu setzen

$$\frac{3}{2} \frac{1 + 0,7/4 a_1^2}{1 - 0,7/4 a_1^2},$$

statt  $4 b_1^2$  genauer  $4 b_1^2 + \lambda^2$ , wodurch die Klammergrößen je etwas *größer* würden. Die Berücksichtigung der Abweichung

1) Da diese Methode meines Wissens bei physikalischen Problemen noch nicht angewandt wurde, so möge sie hier kurz angeführt werden. Ist die Wurzel der Gleichung  $f(x) = 0$  zu bestimmen und ist  $x_1$  ein Näherungswert derselben, so erhält man die Korrektur  $\Delta x_1$  aus

$$\Delta x_1 = \frac{-f(x_1)}{f'(x_1)},$$

wo  $f(x) = \partial f / \partial x$ ; mit dem neueren Näherungswert  $x_1 + \Delta x_1 = x_2$  findet man als weitere Korrektur

$$\Delta x_2 = \frac{-f(x_2)}{f'(x_2)} \quad \text{usw.}$$

des Moduls in der ersten und zweiten Hauptlage vom gesuchten Wert  $x$  würde beide Klammergrößen etwas kleiner machen, so daß Kompensation eintritt.

Um mit gleicher Genauigkeit in den abgelesenen Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  zu arbeiten, nimmt man  $a$  und  $b$  so, daß die Winkel wenig voneinander verschieden sind.

Stellt man z. B. die Messungen immer so an, daß  $a = \frac{1}{3}$  der äußeren Stablänge,  $b$  gleich der ganzen Stablänge (entsprechend  $\sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{3}$  der ersten Hauptlage und  $\sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{2}$  der zweiten Hauptlage), so hat man für alle Polmessungen, welches auch die Stablänge sein mag

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(x_1^2) = \frac{1}{2} \frac{(8,3 + \frac{1}{3} \lambda^2)^2 - 61,136}{(8,3 + \frac{1}{3} \lambda^2) + 9,7558 c}, \\ \text{wo} \\ c = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{5 \text{ Nadelänge}}{6 \text{ Stablänge}}, \quad x = \sqrt{0,7 + \Delta(x_1^2)}. \end{array} \right.$$

Für starke Magnete wie im Fall 1 wird man wählen  $a = 3$  Stablängen,  $b = \frac{1}{3}$  Stablängen und für  $\Delta(x_1^2)$  eine ähnliche Formel erhalten.

Man hat dann den großen Vorteil, für  $\alpha$  und  $\beta$  große Winkel zu erhalten.

*Beispiel:* Ein Stab  $20 \times 0,2 \times 0,4$  cm (spezifischer Magnetismus rund 500; Polstärke 60 M.E.) gab für

$$a = 30 \text{ cm}, \quad b = 20 \text{ cm}, \quad \alpha = 26,04^\circ, \quad \beta = 28,3^\circ,$$

die Bussolenadel war 2,5 cm lang.

Hier ist

$$\lambda^2 = \left( \frac{5}{6} \cdot \frac{2,5}{20} \right)^2 = 0,01085, \quad c = \frac{\operatorname{tg} 28,3^\circ}{\operatorname{tg} 26,04^\circ} = 1,102,$$

hiermit wird

$$\Delta(x_1^2) = 0,0469, \quad x = \sqrt{0,7 + 0,0474} = 0,864$$

der Modul des Polabstandes.

Stuttgart, Physik. Inst. d. Tierärztl. Hochschule, Juli 1908.

(Eingegangen 1. August 1908.)



## 7. Über die Elektronenemission glühender Metalloxyde; von Felix Jentsch.

(Gekürzte Berliner Dissertation.)

Die Elektronenemission glühender Stoffe prüft man am besten in der Weise, daß man das zu untersuchende Material in Form eines Drahtes innerhalb eines Metallzylinders anordnet und durch einen elektrischen Strom zum Glühen bringt. Stellt man zwischen Draht und Zylinder eine Potentialdifferenz her, so tritt eine elektrische Strömung von der Richtung auf, als ob der Draht negative Ladungen emittiert. Nach J. J. Thomson<sup>1)</sup> sind dies Elektronen. Beim allmählichen Steigen des Potentials wird der Strom gesättigt und kann dann durch die Gleichung:

$$(1) \quad J = e \cdot N$$

dargestellt werden. Hierbei bedeuten  $J$  die auf die Oberfläche des Drahtes bezogene Stromdichte,  $e$  das Elementarquantum,  $N$  die Zahl der von der Flächeneinheit des Drahtes in der Zeiteinheit ausgehenden Elektronen. Für die Abhängigkeit dieser Zahl  $N$  von der Temperatur gab O. W. Richardson<sup>2)</sup> eine Theorie, die auf der Annahme beruht, daß sich im Innern eines Leiters freie Elektronen befinden, deren Zahl von der Temperatur unabhängig ist. Diese sollen sich gerade so wie die Moleküle eines idealen Gases verhalten, so daß ihre kinetische Energie der absoluten Temperatur proportional ist und dieser Proportionalitätsfaktor denselben Wert wie in der kinetischen Gastheorie hat. Wenn die zur Oberfläche senkrechte Geschwindigkeitskomponente eines einzelnen Elektrons einen gewissen, für den betreffenden Leiter charakteristischen Wert

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) 48. p. 547. 1899.

2) O. W. Richardson, Phil. Trans. 201. p. 516. 1903.

übersteigt, kann dieses entweichen. Unter diesen Voraussetzungen<sup>1)</sup> fand Richardson:

$$(2) \quad N = n \sqrt{\frac{RT}{2\pi m}} \cdot e^{-\frac{\Phi}{RT}}.$$

Dabei bedeuten  $n$  die Dichte der Elektronen in der emittierenden Substanz,  $T$  die absolute Temperatur,  $\Phi$  die Arbeit, die ein Elektron beim Durchsetzen der Oberfläche leistet,  $m$  seine Masse und  $R$  die „Gaskonstante für ein einzelnes Elektron“.

Für den Sättigungsstrom folgt aus der Richardsonschen Gleichung:

$$(3) \quad J = n e \sqrt{\frac{R}{2\pi m}} \cdot \sqrt{T} \cdot e^{-\frac{\Phi}{RT}}.$$

Nimmt man mit Richardson an, daß die Arbeit  $\Phi$  im wesentlichen elektrischer Natur ist, gibt es eine das Entweichen der Elektronen hindernde Potentialdifferenz an der Oberfläche des Leiters, bei deren Durchlaufen das Elektron die Arbeit  $\Phi$  leistet. Aus der Gleichung

$$(4) \quad \Phi = e \cdot \delta \varphi$$

kann man demnach diesen Potentialsprung  $\delta \varphi$  in Volt berechnen.

Sämtliche Beobachtungen, die bisher über die Elektrizitätsabgabe glühender Körper angestellt wurden und, wie hier gleich im voraus bemerkt sein mag, auch die des Verfassers, können in der Tat durch eine Gleichung von der Form

$$(5) \quad J = A \sqrt{T} \cdot e^{-\frac{B}{T}}$$

sehr gut dargestellt werden. Diese Übereinstimmung entscheidet aber keineswegs über die Gültigkeit der Voraussetzungen, unter denen die Formel von Richardson ab-

1) Es sei hier daran erinnert, daß die Richardsonsche Ableitung nur gilt, falls die Strombewegung der Elektronen (im Heizstrom des Drahtes) klein ist gegen ihre ungeordnete Wärmebewegung.

2)  $R$  ist identisch mit der Konstanten  $k$  des Planckschen Strahlungsgesetzes. Beide Größen sind definiert als Quotient aus der allgemeinen Gaskonstante und der Zahl der Moleküle bzw. Elektronen im Mol. (vgl. Planck, Vorles. über Wärmestrahlung p. 147. 1906).

geleitet wurde. Denn J. J. Thomson<sup>1)</sup> vermochte die Formel ohne Zuhilfenahme von Vorstellungen der kinetischen Gastheorie, H. A. Wilson<sup>2)</sup> sogar rein thermodynamisch abzuleiten. Ja selbst, wenn es gar keine Elektronenemission gäbe, sondern nur im glühenden Leiter okkludierte Gase die Erscheinung bewirken würde, erhielte man doch die gleiche Formel.

A. Wehnelt<sup>3)</sup> zeigte, daß nicht nur die Metalle, sondern auch eine Reihe von Metalloxyden, vor allem die der Erdalkalimetalle, die Fähigkeit besitzen, im Glühzustande Elektronen auszusenden. Die Ströme, die er erhielt, sind bei der gleichen Temperatur etwa 1000 mal so groß wie die von Richardson an reinem Platindraht gefundenen, steigen aber im übrigen in genau der gleichen Weise mit der Temperatur an, wie es die Formel verlangt. Wehnelt vermutete, daß die Fähigkeit zur Aussendung negativer Elektronen den wirksamen Metalloxyden allein zuzuschreiben ist und daß die Metalle (Platin), auf denen das Oxyd sich befindet, nur als Träger dienen, ohne selbst zu der Emission wesentlich beizutragen.

O. W. Richardson<sup>4)</sup> vertritt dagegen die Anschauung, daß die Oxyde eine sekundäre Rolle spielen und nur die zum Entweichen der Elektronen aus dem Metall erforderliche Energie herabsetzen.

Durch die Versuche von F. Deininger<sup>5)</sup> scheint aber wohl die Ansicht von Wehnelt bestätigt zu sein. Deininger fand bei glühenden, nicht mit Calciumoxyd bedeckten Drähten aus Platin, Kohle, Tantal und Nickel für die beiden Konstanten der Formel je einen für den betreffenden Stoff charakteristischen Wert. Wurden aber die Drähte mit Calciumoxyd überzogen, waren in allen vier Fällen die Werte für die Konstanten  $A$  und  $B$  die gleichen. Wir müssen daher annehmen, daß nicht ein die Arbeit  $\Phi$  herabsetzender Einfluß des Oxyds eine erhöhte Emissionsfähigkeit des überzogenen Drahtes hervorruft, sondern daß das Calciumoxyd selbst die negativen Elektronen aussendet.

1) J. J. Thomson, *Conduction of Electricity through Gases*. Sec. ed. p. 199. 1906.

2) H. A. Wilson, *Phil. Trans.* 202. p. 258. 1903.

3) A. Wehnelt, *Ann. d. Phys.* 14. p. 425. 1904.

4) O. W. Richardson, *Jahrb. d. Radioaktivität* 1. p. 300. 1904.

5) F. Deininger, *Ann. d. Phys.* 25. p. 285. 1908.

Da es also gar nicht auf die Träger, sondern nur auf die Oxyde selbst ankommt, untersuchte Verfasser quantitativ die Emission von ca. 20 verschiedenen Metalloxyden in der Absicht, einen etwaigen Zusammenhang zwischen der Elektronenemission und anderen chemischen und physikalischen Eigenschaften der Oxyde zu suchen.

#### Die Messungen.

**Gefäß.** Das zu den Messungen benutzte Rohr zeigt Fig. 1. In einem Kahlbaumschen Schliff ist an einer starken Platindurchschmelzung ein ca. 2 mm dicker Messingstab befestigt, der am Ende eine geschlitzte Klemmschraube trägt. In diese

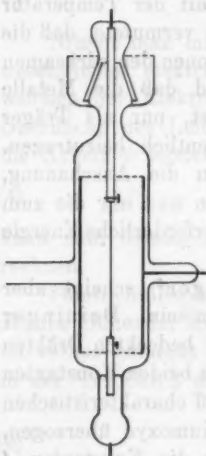


Fig. 1.

werden oxydbedeckte Platindrähte eingespannt und am anderen Ende durch ein in gleicher Weise befestigtes Messingstück beschwert. Dies taucht in einen Quecksilbernappf, der mittels einer starken Platindurchschmelzung als Stromzuführungsstelle dient. Der Messingzylinder (Durchmesser 23 mm) kann mittels eines seitlich eingeschraubten Messingstiftes aufgeladen werden.

Diese Ausführungsform bietet den Vorteil, sehr schnell Drähte auswechseln zu können und gestattet es vor allem — bei sorgsamer Ausrichtung des ganzen Gefäßes —, den Draht vollkommen gerade und koaxial zum umgebenden Zylinder anzubringen. Letzteres ist von großer Wichtigkeit, da bei nicht ganz koaxialen Drähten Änderungen im Potentialverlauf auftreten können, die eventuell die ganze Erscheinung komplizieren. Verläuft nämlich der Draht an einer Stelle sehr nahe dem Zylinder — wie dies in den Röhren von O. W. Richardson und H. A. Wilson meist der Fall war —, kann dort eine so große Feldstärke auftreten, daß Stoßionisation stattfindet. Diese wird vermieden, wenn die freie Weglänge kleiner ist, als die Entfernung der Stelle vom Draht, deren Potentialdifferenz gegen den Draht gleich der Ionisierungsspannung ist. Der

Potentialgradient ist dicht am Draht am größten und steigt bei nicht koaxialen Drähten gerade dort bedeutend an.

Ein Nachteil dieser Anordnung besteht darin, daß das Rohr sich nicht von Quecksilberdämpfen frei halten läßt, die nach J. Stark<sup>1)</sup> eine besonders niedrige Ionisierungsspannung haben. Eine koaxiale Lage des Drahtes schien aber wichtiger als die Vermeidung von Quecksilberdampf, zumal da nach H. A. Wilson<sup>2)</sup> dieser erst oberhalb 1600° C. merklichen Einfluß auf den Strom hat.

**Druck.** Zum Evakuieren des Gefäßes wurde zuerst eine gewöhnliche Toeplersche Pumpe benutzt. Es erwies sich aber bald als unmöglich, damit zu arbeiten, da der glühende Draht Gas genug abgab, um den Druck in dem kleinen Gefäß merklich zu steigern. Es wurde deshalb bei den endgültigen Messungen eine automatisch wirkende Quecksilberfallpumpe benutzt, die während einer Messungsreihe beständig im Betrieb war. Da sie bei höheren Temperaturen kleine Gasbläschen fortführte, mag ja wohl dabei ein höherer Druck als zu Beginn der Messung geherrscht haben. Sicher aber war er auch bei den höchsten Temperaturen kleiner als 0,1 mm, etwa von der Ordnung einiger Hundertstel mm.

Nach den Untersuchungen von A. Wehnelt<sup>3)</sup> ist die Größe des Sättigungsstromes unterhalb 0,1 mm vom Druck nahezu unabhängig. Ähnliche Angaben macht I. A. Mc. Clelland<sup>4)</sup> der zwischen  $\frac{1}{25}$  und  $\frac{1}{240}$  mm keine Änderung des Sättigungsstromes fand. Der beste Beweis, daß diese Verhältnisse im vorliegenden Falle erreicht waren, liegt darin, daß bei ruhender Pumpe, aber stark glühendem Draht, während der Druck also zweifellos stieg, der Sättigungsstrom recht lange Zeit konstant blieb.

Die Zeitdauer, während der dies der Fall ist, hängt natürlich davon ab, wieviel Gas der Draht noch abgibt. So sorgfältig man ihn auch präpariert und solange man ihn auch ausglühen mag, etwas Gas gibt der Draht stets ab. Vor allem verändert sich seine Struktur bei längerem Glühen voll-

1) J. Stark, Handbuch d. Phys. IV. 2. p. 500.

2) H. A. Wilson, l. c. p. 261.

3) A. Wehnelt, l. c. p. 442.

4) I. A. Mc. Clelland, Proc. Cambr. Phil. Soc. 11. p. 305. 1902.

ständig, er zerstäubt auf die Wände des Gefäßes, wird brüchig usw. Um die Gasabgabe zu beschleunigen und konstante Werte zu erhalten, wurden alle Drähte in folgender Weise behandelt. Sie wurden zuerst in konzentrierter Salpetersäure einige Minuten lang ausgekocht, dann durch galvanisches Erwärmen an Luft getrocknet und endlich im Vakuum mindestens 5 Stunden lang ausgeglüht, wobei natürlich die Pumpe fortgesetzt arbeitete. Um endlich während einer Messungsreihe konstante Ausschläge zu erhalten, erwies es sich als vorteilhaft, kurz vorher den Draht noch einmal bis auf die Maximaltemperatur zu erhitzen, die in der folgenden Reihe benutzt werden sollte.

War der Draht nicht genügend ausgeglüht, konnte mehrfach, ohne daß die Temperatur verändert wurde, ein rückweises Vergrößern des Ausschlages bemerkt werden, der dann nach einigen Minuten langsam wieder auf seinen alten Stand zurückkehrt. Man kann diese Erscheinung mit dem plötzlichen Entweichen von Gasblasen (Wasserstoff) in Beziehung setzen.

Es gelang endlich konstante Werte zu erhalten, wenn die Pumpe sehr rasch arbeitete und sämtliche Verbindungsrohre möglichst kurz und weit waren.

Alle störenden Nebenerscheinungen wie Druckschwankungen, Ionisation usw. waren bei den endgültigen Messungen ausgeschlossen. Den Beweis dafür bieten die Sättigungskurven. Im Zustande des Sättigungsstromes — der bei dem benutzten Rohr bei 15—20 Volt erreicht wurde — ist die Ionenerzeugung unabhängig von der Feldstärke. Werden durch das elektrische Feld selbst Stromträger erzeugt, findet also Stoßionisation statt, muß der Strom dauernd mit Erhöhung der Feldstärke steigen. Bei verschiedenen starken Feldern und Evakuationsgraden wird der horizontale Teil der Stromkurve, der den Sättigungsstrom darstellt, verschieden lang werden, zum Wendepunkt zusammenschrumpfen, ja ganz verschwinden (Fig. 2). Es wurden alle diese verschiedenen Formen beobachtet. Bei den endgültigen Messungen wurde in der ersten Zeit jedesmal die Feldstärke soweit gesteigert, bis der Ausschlag am Galvanometer konstant blieb. Später wurde der Effekt nur noch bei drei bestimmten Feldstärken gemessen, nämlich bei ca. 15, 30 und 100 Volt Potentialdifferenz zwischen Draht und Zylinder.

Die bei 15 und 30 Volt erhaltenen Werte stimmten stets sehr nahezu überein, der bei 100 Volt wurde bisweilen, vor allem bei sehr hoher Temperatur, größer als die beiden anderen er-

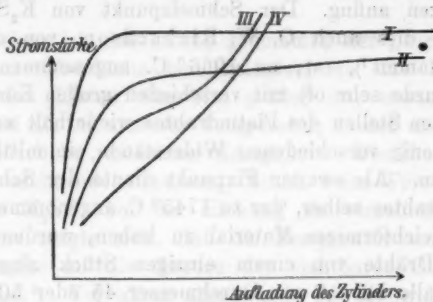


Fig. 2.

halten. Überhaupt erwies es sich fast als unmöglich, bei Temperaturen über etwa  $1300^{\circ}\text{C}$ . richtige Sättigung zu erhalten. Dann war die Stromkurve aber immer noch vom Typus II der Figur.

**Temperatur.** Die Temperatur des glühenden oxydbedeckten Platindrahtes wurde aus seinem Widerstande ermittelt, der mittels der Abzweigmethode bestimmt wurde. Der Zweigstrom (ca.  $10^{-4}$  Amp.) wurde mit demselben Galvanometer gemessen, das zur Messung der Sättigungsströme diente und war klein gegen den Heizstrom (ca. 2 Amp.), der mit einem Präzisionsamperemeter von Siemens & Halske bestimmt wurde.

In der ersten Zeit wurde bei jeder Messung eines Sättigungsstromes auch der gleichzeitige Widerstand des Drahtes bestimmt. Später wurde vor und nach jeder Reihe der Zusammenhang zwischen Heizstrom und Widerstand festgestellt und die Sättigungsströme bei bestimmten Heizströmen gemessen. Ebenfalls vor und nach jeder Reihe wurde in derselben Weise der Widerstand bei Zimmertemperatur bestimmt. Die hierbei verwandten Ströme betrugen nur einige Milliampere, konnten daher den Draht nicht wesentlich erwärmen.

Um den Zusammenhang zwischen Widerstand und Temperatur festzustellen, wurde auf die Mitte des horizontal gelegten Drahtes in genau der gleichen Fassung und Anordnung,



die später im Vakuum benutzt wurde, ein möglichst kleines Körnchen  $K_2SO_4$  gebracht, und der Widerstand gemessen, wenn das mit einer guten Lupe betrachtete Körnchen gerade zu schmelzen anfangt. Der Schmelzpunkt von  $K_2SO_4$  wurde dabei, wie dies auch O. W. Richardson, von dem diese Methode stammt<sup>1)</sup>, tat, zu  $1066^\circ C.$  angenommen<sup>2)</sup>. Diese Eichung wurde sehr oft mit verschiedenen großen Körnchen, an verschiedenen Stellen des Platindrahtes wiederholt und für die nur sehr wenig verschiedenen Widerstände ein mittlerer Wert angenommen. Als zweiter Fixpunkt diente der Schmelzpunkt des Platindrahtes selber, der zu  $1745^\circ C.$  angenommen wurde.<sup>3)</sup> Um ein gleichförmiges Material zu haben, wurden sämtliche benutzten Drähte von einem einzigen Stück abgeschnitten. Sie waren alle bei 0,2 mm Durchmesser 45 oder 50 mm lang. Diese ganze Eichung wurde im Laufe der Messungen mehrfach wiederholt und stets in genügend guter Übereinstimmung gefunden. Aus den beiden so gefundenen Widerständen bei  $1066^\circ$  und  $1745^\circ$  und aus dem Widerstand bei Zimmertemperatur wurden die Konstanten einer quadratischen Gleichung  $w_t = w_0(1 + a \cdot t - b t^2)$  berechnet und eine Tabelle der Widerstände für die Temperaturen von 100 zu  $100^\circ$  aufgestellt. Nach dieser Tabelle wurden die Temperaturen als Funktion der Widerstandsänderungen  $w_t/w_{100}$ ,  $w_t/w_{1745}$  und  $w_t/w_{1066}$  graphisch aufgetragen, so daß für jedes beobachtete  $w_t/w_0$  die zugehörige Temperatur sofort abgelesen werden konnte.

Wegen der Abkühlung an den Enden kann bei Berechnung der Dichte des Sättigungsstromes nicht die wirkliche Oberfläche des Drahtes als wirksam betrachtet werden, sondern muß — wie dies auch O. W. Richardson und H. A. Wilson tun — um etwa 10 Proz. kleiner genommen werden. Es ist nicht von großer Bedeutung, ob dies nun wirklich gerade 10 Proz. sind, da ja in der Richardsonschen Formel die bei weitem interessantere Konstante  $B$  von den absoluten Werten der Stromdichte ganz unabhängig ist und sich nur auf die

1) O. W. Richardson, l. c. p. 513.

2) C. F. Heycock u. F. H. Neville, Journ. Chem. Soc. 67. p. 160. 1895.

3) W. Nernst u. H. v. Wartenberg, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 8. p. 48. 1906.



Art des Anwachsens des Stromes mit der Temperatur bezieht. Die Konstante  $A$ , in die die Größe der Drahtoberfläche eingeht, wird aber überhaupt nur sehr ungenau bestimmt (vgl. unten).

Wichtiger ist, daß streng genommen der „wirksame“ Teil der ganzen Oberfläche bei Weißglut, wo das Temperaturfälle an den Enden sehr viel größer ist, etwas mehr betragen wird als bei niedriger Temperatur, so daß also der Draht eine veränderliche „wirksame“ Länge hat. Der Einfluß hiervon war aber nicht nachzuweisen. Schon beim Verschieben des Körnchens  $K_2SO_4$  bei der Eichung an verschiedene Stellen des Drahtes zeigte sich, daß die Temperatur von der Mitte aus bis nahe an die Grenze der sichtbaren Glut ziemlich konstant ist.<sup>1)</sup> Vor allem aber wurde zur Kontrolle noch ein besonderes Rohr benutzt, dessen Auffangezylinder so unterteilt war, daß das Mittelstück gerade so lang wie die als wirksam angenommene Drahtlänge in dem Rohr der endgültigen Messungen war. Wurden nun bei gleichen Temperaturen des sehr langen Drahtes einmal nur der mittlere, dann alle drei Zylinder aufgeladen, so verliefen die so erhaltenen beiden Stromkurven vollständig parallel.

Die Fehler der Temperaturmessung, die sich aus den Ablesfehlern selbst ergeben, berechnen sich nach den bekannten Methoden der Fehlerrechnung<sup>2)</sup> zu

$$\Delta t = \pm 5,8^\circ \text{ bei } 1000^\circ \text{ C.},$$

$$\Delta t = \pm 7,6^\circ \text{ bei } 1500^\circ \text{ C.}$$

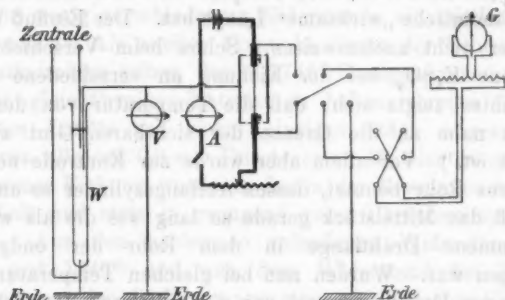
So geringe Fehler ergeben sich deshalb, weil bei ihrer Berechnung zu beachten ist, daß es ja nur auf die relative Genauigkeit der einzelnen Temperaturbestimmungen gegeneinander ankommt und daher die Fehler der Temperatureichung (des Widerstandes) zu vernachlässigen sind. Außerdem wurde die zu Anfang und am Ende jeder Reihe festgestellte Beziehung

1) Desgleichen ergaben sich mit dem optischen Pyrometer, dessen Genauigkeit wegen der Feinheit des glühenden Drahtes aber nicht sehr hoch zu schätzen war, auf die Länge des als wirksam angesetzten Stückes nur Temperaturdifferenzen von 30–90 Grad.

2) Ausführlich auf p. 19–21 der Dissertation.

zwischen Heizstrom und Temperatur jedesmal graphisch ausgeglichen.

*Schaltung.* Die Schaltung ergibt sich aus Fig. 3. Da von der städtischen Zentrale nur eine positive Spannung von 110 Volt zur Verfügung stand, wurde der Auffangezylinder positiv aufgeladen und der Draht durch das Galvanometer zur Erde abgeleitet. Der ganze Heizstromkreis wurde isoliert auf



$W$  = Wasserwiderstand,  $V$  = Voltmeter,  $A$  = Amperemeter,  
 $G$  = Galvanometer.

Fig. 3.

großen Paraffinklötzen aufgestellt. Die Ladung des Zylinders wurde in der von A. Wehnelt<sup>1)</sup> beschriebenen Weise mittels eines regulierbaren Wasserwiderstandes ausgeführt. Es ist notwendig, das Potential langsam zu ändern, da sonst besonders bei hohen Temperaturen plötzliche ruckweise Schwankungen des Sättigungsstromes auftreten, die bis 100 Proz. betragen können.<sup>2)</sup> Das Potential der Aufladung konnte mit einem Siemens-Präzisionsvoltmeter abgemessen werden, wurde aber meist nach den bekannten Einstellungen des Wasserwiderstandes nur geschätzt. Mit dem Milliampereometer konnten Ströme bis zu 7,5 Ampere gemessen werden. Als Galvanometer diente ein Desprez d'Arsonval-Instrument von

1) A. Wehnelt, l. c. p. 441.

2) Sie sind jedenfalls auf vorübergehende Stoßionisation zurückzuführen und können bei einiger Vorsicht leicht vermieden werden.

Siemens & Halske mit einem inneren Widerstande von 10 000 Ohm. Die Empfindlichkeit der Aufstellung war 1 mm  $= 3,15 \cdot 10^{-10}$  Amp. gleich 0,946 absolute elektrostatische Einheiten.

*Gang einer Messung.* Nachdem der Platindraht in der oben beschriebenen Weise sorgfältig gereinigt war und unter beständigem Pumpen einige Stunden lang geglüht hatte, wurde der Sättigungsstrom bei konstanter Aufladung des Zylinders auf etwa 20 Volt gemessen, indem der Heizstrom stufenweise vergrößert wurde. Dies geschah, um festzustellen, ob der Draht auch genügend rein sei, und nicht etwa Spuren eines wirksamen Oxyds trage. Dann wurde der Draht wieder aus dem Gefäß, ohne ihn anzuspannen, herausgenommen und mit einer nahezu gesättigten Lösung des Nitrates des betreffenden Stoffes bestrichen.<sup>1)</sup> Jede Lösung wurde kurz vorher in einem neuen, sorgsam gereinigten Probiergläschen angesetzt und mit einem neuen, ausgebrühten Pinsel aufgetragen. Gläschen wie Pinsel kamen nur mit je einem Stoff in Berührung. Der Draht wurde sodann in Luft elektrisch bis zur Rotglut erhitzt, wobei das Nitrat in das Oxyd übergeht. Bestreichen und Glühen wurden mehrfach wiederholt.

Nach einigen Stunden weiteren Glühens im Vakuum wurde der Widerstand des Drahtes bei Zimmertemperatur gemessen, darauf der Widerstand bei verschiedenen Heizströmen und zwar bei steigender und fallender Temperatur.<sup>2)</sup> Dann wurde bei einer Aufladung des Zylinders auf +15 bis +20 Volt der Heizstrom langsam verändert und dabei der vom Draht zum Zylinder fließende Strom gemessen. Das gleiche geschah bei ca. 30 und bei ca. 100 Volt. Zum Schluß wurde nochmals der Widerstand bei verschiedenen Heizströmen und endlich bei Zimmertemperatur gemessen. Dabei dauerte es wegen der großen Metallmasse im Gefäße bis zu einer halben Stunde,

1) Die benutzten Präparate sind als chemisch rein von Merck in Darmstadt bezogen.

2) Infolge Druckschwankungen können bei gleichem Heizstrom verschiedene Wärmeableitungen und damit verschiedene Temperaturen des Drahtes auftreten. Im allgemeinen fielen die beiden Kurven sehr vollständig zusammen.

ehe das ganze Rohr wieder vollständig Zimmertemperatur angenommen hatte.

Die ganze Messung wurde sodann an einem zweiten in der gleichen Weise hergerichteten Drahte wiederholt, bei einigen Stoffen geschah dies an vielen Drähten je sehr oft. Falls nicht leicht erkennbare Gründe wie schlechtes Vakuum, verunreinigtes Quecksilber usw. vorlagen, wurden genügend übereinstimmende Werte erhalten.

*Störende Einflüsse.* Auf die Reinheit des Quecksilbers in der Pumpe, d. h. Fernhaltung von Fetten mußte großer Wert gelegt werden.<sup>1)</sup> Es wurden daher alle Fettdichtungen vermieden und auch der zum Einlassen von Luft dienende Fett-hahn durch einen besonderen Quecksilberschluß vom Vakuum abgesperrt. Trotzdem erwies es sich von Zeit zu Zeit als notwendig, das Quecksilber der Pumpe frisch zu reinigen — meist genügte bloßes Filtrieren.

Der Spannungsabfall des Heizstromes auf dem Drahte betrug bei hohen Temperaturen bis zu 2 Volt. Eine Potentialdifferenz zwischen Draht und Zylinder von dieser Größe genügt bei richtigem Vorzeichen bereits einen Strom von ca. 20 Proz. des Sättigungsstromes hervorzurufen. Nimmt man die Stromkurve als Funktion der Aufladung des Zylinders auf, zeigt sich in der Tat, daß sie niemals durch den Nullpunkt geht, sondern darüber oder darunter die Achse schneidet, je nachdem das positive oder negative Ende des Drahtes geerdet war. Bei den endgültigen Messungen wurde stets das negative Ende des Drahtes geerdet, so daß er selbst positiv war. Beim Anlegen des elektrischen Feldes konnte dann kein Strom durch das Glühen allein hervorgerufen werden, wenn nicht der Draht positive Ionen aussandte.

#### Die Messungsergebnisse.

*Bestätigung der Formel.* Als Beispiel einer Beobachtungsreihe sei eine an einem mit Lanthanoxyd bedeckten Drahte gemessene Reihe angeführt, die sich keineswegs durch besondere Regelmäßigkeit vor anderen auszeichnet. Fig. 4 gibt eine Darstellung der Zahlen von Tab. I.

1) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. 19. p. 155. 1906.

Tabelle I.

Zweite Lanthanreihe Nr. I. 17. XII. 1907.

$T$ (Cels.)	$T$ (Abs.)	$J$ (elektrostatisch)	
1082 <sup>1)</sup>	1355	12,2	$4,07 \cdot 10^{-9}$ Amp.
1182	1405	35,5	
1177	1450	82,4	
1197	1470	132	
1287	1510	256	
1297	1570	692	$2,39 \cdot 10^{-8}$ Amp.
1352	1625	1515	
1407	1680	3065	
1447	1720	7160	

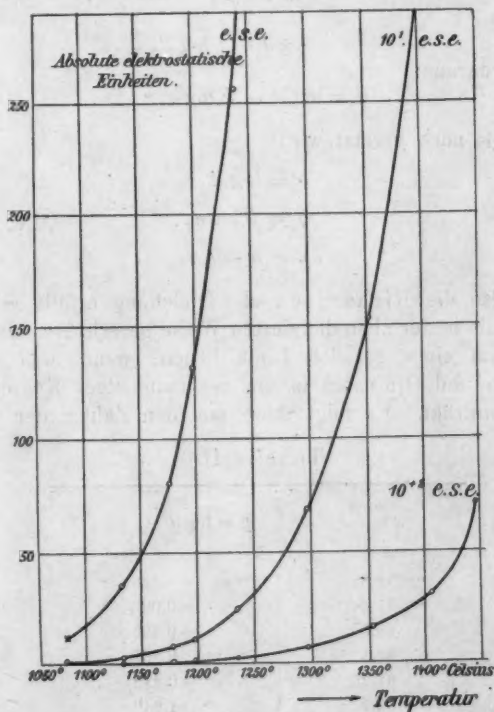


Fig. 4.

1) Die Temperaturen in Celsiusgraden sind aus den absoluten Temperaturen berechnet, die auf 5° abgerundet aus der Kurve entnommen wurden.

Um zu prüfen, ob diese Beobachtungsreihe der Formel genügt, verfährt man nach Richardson vorteilhaft folgendermaßen:

Die Richardsonsche Formel

$$(5) \quad J = A \sqrt{T} e^{-B/T}$$

lautet logarithmiert:

$$\log J = \log A + \frac{1}{2} \log T - \frac{B}{T} \log e.$$

Führt man als neue Variablen ein:

$$(6) \quad x = \frac{1}{T},$$

$$(7) \quad y = \log J - \frac{1}{2} \log T,$$

so wird daraus:

$$y = \log A - B \log e \cdot x,$$

oder, falls noch gesetzt wird:

$$(8) \quad a = \log A,$$

$$(9) \quad b = B \log e,$$

$$(10) \quad y = a - b x.$$

Wenn also die Richardsonsche Gleichung erfüllt sein soll, müssen die in der oben definierten Weise berechneten Größen  $x$  und  $y$  auf einer geraden Linie liegen, wenn man sie als Abszissen und Ordinaten in ein rechtwinkeliges Koordinatensystem einträgt. Es folgt dann aus den Zahlen der Tab. I:

Tabelle II.

$x = \frac{1}{T}$	$y = \log J - \frac{1}{2} \log T$
73,8	-0,482
71,2	-0,026
69,0	+0,335
68,1	0,538
66,25	0,818
63,7	1,243
61,6	1,575
59,6	1,873
58,2	2,237

Wie Fig. 5 zeigt, liegen in der Tat sämtliche Punkte mit Ausnahme des letzten in befriedigender Weise auf einer geraden Linie. Der bei  $1447^{\circ}\text{C}$ . beobachtete letzte Wert ist deshalb zu groß, weil es, wie schon erwähnt, stets schwer fiel, bei diesen hohen Temperaturen wirkliche Sättigung zu erhalten. Er ist wohl durch Stoßionisation vergrößert. Aus Tab. II folgen für die Konstanten die Werte:

$$a = 11,713, \quad b = 16470,$$

also

$$A = 5,16 \cdot 10^{11}, \quad B = 37900.$$

In Tab. III sind die mit diesen Werten berechneten Ströme mit den tatsächlich beobachteten zusammengestellt.

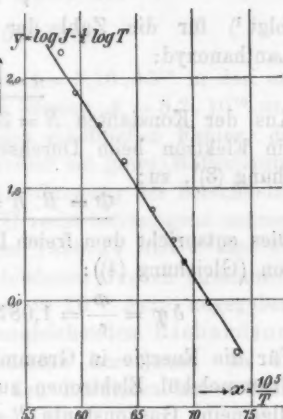


Fig. 5.

Tabelle III.

$$J = 5,16 \cdot 10^{11} \sqrt{T} \cdot e^{-\frac{37900}{T}}$$

T (abs.)	J (ber.)	J (beob.)	Differenz
1355	13,3	12,2	- 1,1 = 8 Proz.
1405	36,7	35,5	- 1,2 = 3 "
1450	86,2	82,4	- 3,8 = 4 "
1470	124	132	+ 8 = 6 "
1510	249	256	+ 7 = 3 "
1570	662	692	+ 30 = 4 "
1625	1525	1515	- 10 = 1 "
1680	3325	3065	- 260 = 8 "
1720	5700	7160	+ 1460 = 26 "

Bezieht man sich auf die Stromdichten, wird  $A = 2,06 \cdot 10^{12}$ .

Für die Zahl der Elektronen, die vom Quadratcentimeter Drahtoberfläche in der Sekunde ausgehen, folgt (Gleichung (1)):

$$N = 4,4 \cdot 10^{21} \sqrt{T} \cdot e^{-\frac{37500}{T}}$$

Da nach Richardson (Gleichung (3))

$$A = n \cdot e \cdot \sqrt{\frac{R}{2\pi m}} = 2,06 \cdot 10^{12},$$

folgt<sup>1)</sup> für die Zahl der Elektronen im Kubikzentimeter Lanthanoxyd:

$$n = 2,87 \cdot 10^{16}.$$

Aus der Konstanten  $B = 37\,900$  erhält man die Arbeit, die ein Elektron beim Durchsetzen der Oberfläche leistet (Gleichung (3)), zu:

$$\Phi = B \cdot R = 5,10 \cdot 10^{-12} \text{ erg.}$$

Dies entspricht dem freien Durchlaufen einer Potentialdifferenz von (Gleichung (4)):

$$\delta\varphi = \frac{\Phi}{e} = 1,087 \cdot 10^{-2} \text{ e. s. e} = \underline{3,26 \text{ Volt.}}$$

Für die Energie in Grammkalorien, die erforderlich ist, ein Grammmolekül Elektronen zu erzeugen, findet man, wenn die allgemeine Gaskonstante  $R = 1,985$  gesetzt wird:

$$Q = 75200 \text{ g-cal.}$$

*Fehler der Konstantenbestimmung.* Wie sich schon aus der Form der Richardsonschen Gleichung ersehen läßt, werden die beiden Konstanten mit sehr verschiedener Genauigkeit bestimmt.

Der Fehler in  $b$  (bzw.  $B$  oder  $\Phi$ ) hängt wesentlich von dem Temperaturintervall ab, über das sich die Berechnung erstreckte. Für das oben mitgeteilte Beispiel ergibt eine genaue Berechnung<sup>2)</sup>

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta b}{b} = \pm 2,8 \text{ Proz.,}$$

1) Die wirksame Oberfläche der Drähte wurde stets zu  $0,25 \text{ cm}^2$  angenommen. Wegen der Identität der Gaskonstanten für ein einzelnes Elektron  $R$  mit den Strahlungskonstanten  $k$  des Planckschen Gesetzes wurden die Werte benutzt, die sich aus der Strahlungstheorie (l. c., Gleichung (252), p. 162 und Gleichung (257), p. 163) ergeben

$$R = 1,316 \cdot 10^{-18} \frac{\text{erg}}{\text{Grad}},$$

$$e = 4,69 \cdot 10^{-10} \text{ e. s. e.}$$

Mit Hilfe des Bestelmeyerschen Wertes (Ann. d. Phys. 22. p. 446. 1907)  $e/m_e = 1,72 \cdot 10^7$  wurde für die Masse eines Elektrons gefunden

$$m = 0,909 \cdot 10^{-27} \text{ g, also ist: } A = n \cdot 7,2 \cdot 10^{-5}.$$

2) Vgl. Dissertation p. 29–31.



Geringe Unterschiede im Werte des Exponenten rufen aber schon außerordentlich große Änderungen der ersten Konstanten hervor. Für das Beispiel ergibt sich

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta A}{A} = \pm 530 \text{ Proz.}$$

Dies bedeutet, daß man statt  $A = 5,16 \cdot 10^{11}$  in den extremen Fällen auch hätte erhalten können  $A_1 = 8,2 \cdot 10^{10}$  und  $A_2 = 3,25 \cdot 10^{12}$ . In Anbetracht der erheblichen Fehler, die sich für die Konstanten sonach selbst bei guter Meßgenauigkeit ergeben, kann man die Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Werte von Tab. III recht befriedigend nennen.

*Die gemessenen Ströme.* In den Tabb. IV und V sind die Resultate der Messungen an verschiedenen Oxyden zusammengestellt. Es sind die Stromdichten in  $10^{-8}$  Amp. angegeben, wie sie sich aus den aus der ausgleichenden Richardson'schen Geraden gefundenen Konstanten berechnen. Es sei dahin gestellt, welche Oxyde bei den benutzten hohen Temperaturen wirklich noch vorhanden waren.

Tabelle IV.

Oxyd von	Ca	Ba	Sr	Y	Zr	Ce	La	Th	Be
° C.									
700	0,14	—	—	—	—	—	—	—	—
750	1,11	0,33	—	—	—	—	—	—	0,24
800	6,94	2,10	0,11	0,13	—	—	—	—	0,71
850	39,2	12,7	0,73	0,58	0,16	—	—	—	2,01
900	183	63,6	4,2	2,3	0,62	—	—	—	5,05
950	764	278	20,6	8,6	2,42	0,37	—	—	12,0
1000	8840	1080	86,8	28,8	7,83	1,53	0,29	—	25,3
1050	9630	3920	333	83,8	23,6	4,61	0,91	0,27	52,9
1100	—	—	1183	236	66,6	13,3	2,59	0,73	103
1150	—	—	3830	585	171	35,3	6,97	1,83	(201)
1200	—	—	—	1420	410	85,7	17,9	4,51	(356)
1250	—	—	—	3330	952	201	42,0	10,0	—
1300	—	—	—	—	2110	—	94,0	21,25	—
1350	—	—	—	—	4300	—	201	—	—
1400	—	—	—	—	—	—	420	—	—
1450	—	—	—	—	—	—	810	—	—
1500	—	—	—	—	—	—	1527	—	—

Die eingeklammerten Werte sind extrapoliert.

Tabelle V.

Oxyd von	Cu	Cd	Co	Fe	Ni	Al	Mg	Zn
1000° C.	0,26	—	—	—	—	—	—	—
1050	0,52	0,16	—	—	—	—	—	—
1100	0,98	0,39	—	—	—	—	—	—
1150	1,79	0,87	—	—	—	—	—	—
1200	3,08	1,75	0,45	0,20	—	0,25	—	—
1250	5,17	3,49	1,33	0,59	0,27	0,58	—	—
1300	8,53	6,82	4,01	1,63	0,83	1,30	0,16	0,24
1350	13,6	12,2	10,6	4,06	2,26	2,71	0,37	0,49
1400	21,5	22,1	27,5	9,83	5,87	5,48	0,78	0,95
1450	31,3	—	65,1	22,6	14,6	10,4	1,53	1,75
1500	—	—	149	—	34,2	20,1	2,98	3,18
1550	—	—	—	—	74,0	34,9	5,47	5,53
1600	—	—	—	—	—	62,1	10,1	9,60
1650	—	—	—	—	—	106	—	15,9
1700	—	—	—	—	—	—	—	25,6

Wie man aus diesen Tabellen sieht, ist die Frage, ob und wieviel ein Oxyd stärker als ein anderes emittiert, nur für eine bestimmte Temperatur eindeutig zu beantworten, da die Ströme verschieden schnell wachsen und auch Überholungen mehrfach vorkommen.

Bei den *stark wirksamen* Oxyden der Erdalkalien war es nicht möglich, bei höheren Temperaturen Sättigungsströme zu erhalten; bisweilen setzte schon bei der niedrigen Spannung von etwa 25 Volt sichtbare Entladung ein. Bei passend gewähltem Druck kann man sie schon bei 15 Volt erhalten. An und für sich ist es klar, daß sowie überhaupt Stoßionisation stattfindet, auch elektromagnetische Strahlung vorhanden sein muß; nur wird der Schwellenwert unserer Augen hinsichtlich Stärke und Wellenlänge erst bei gewissen Verhältnissen überschritten. Außerdem war im vorliegenden Falle das helle Glühen des Drahtes für die Beobachtung einer sehr lichtschwachen Entladung in seiner nächsten Umgebung äußerst ungünstig.

Bei den nur *sehr schwach wirksamen* Oxyden mußte darauf geachtet werden, daß der das Oxyd tragende Platindraht ganz

besonders sorgfältig gereinigt war, um die von ihm selbst ausgesandten Ströme möglichst viel kleiner als die des Oxydes zu erhalten. Bei den Oxyden von Zink und Magnesium, deren Ströme besonders langsam ansteigen, gelang dies nur bei niederen Temperaturen. Bei den höchsten Temperaturen wurden keine deutlichen Unterschiede zwischen reinem und oxydbedecktem Draht erhalten.

Die Ströme von *unbedecktem Platindraht* konnten nicht so klein gemacht werden, wie dies H. A. Wilson erreichte, indem er sein ganzes Meßgefäß 24 Stunden lang in konzentrierter Salpetersäure kochen ließ, aber immerhin betrugen sie im günstigsten Fall nur  $\frac{1}{30000}$  der von Richardson gemessenen.

Die Ströme von *Thalliumoxyd* unterschieden sich nicht von denen des unbedeckten Drahtes. Eine einfache Erklärung wurde später darin gefunden, daß  $Tl_2O_3$  schon bei  $760^\circ$  schmilzt.

Die gleiche Beobachtung wurde bei *Bleioxyd* gemacht.

Von den Alkalimetallen wurde nur das Oxyd von *Lithium* untersucht. Wegen der schon bei 700 bis  $800^\circ$  C. eintretenden Zersetzung des Oxydes wurde der mit dem Nitrate bestrichene Draht nur ganz mäßig und nur auf ganz kurze Zeit erwärmt und dann gleich ohne weiteres Ausglühen der Effekt gemessen. Es zeigte sich auch anfänglich ein verhältnismäßig starker Strom, doch bei weiterem Steigern der Temperatur ging plötzlich der Ausschlag zurück bis auf die Größe des für den unbedeckten Draht gefundenen.

Eine auffallende Erscheinung wurde bei *Mangan* beobachtet. Bei einer Steigerung der Temperatur trat stets ein bisweilen sehr schnelles Wandern des Galvanometers zu höheren Ausschlägen ein. Wurde der Draht längere Zeit auf sehr hohen Temperaturen gehalten, so waren darauf die Ausschläge bei tieferen Temperaturen durchaus konstant, bis bei einer nur wenig höheren Temperatur, als dies vorher der Fall gewesen war, doch wieder ein Steigen des Stromes vorkam. Es ist wahrscheinlich, daß diese Beobachtung mit den verschiedenen Oxydationsstufen des Mangans etwas zu tun hat. Es könnte sein, daß jede Oxydationsstufe eine bestimmte Stromstärke emittiert und daß diese entsprechend der nur allmählich vor sich gehenden Umsetzung auch nur allmählich erreicht wird. Dann müßte aber dem beständigsten

Oxyd die stärkste Abgabe von Elektronen zukommen, wahrscheinlicher ist es wohl, daß der beim Erhitzen der höheren Oxydationsstufen entweichende Sauerstoff selbst den Stromträger abgegeben hat. Eine sichtbare Entladung konnte nicht wahrgenommen werden.

Ein ganz anderes Bild von der Wirksamkeit der einzelnen Oxyde, als die Tab. IV und V, bieten die aus den beobachteten Strömen nach der Richardsonschen Formel berechneten Konstanten. In Tab. VI sind in den ersten beiden Spalten die Konstanten  $A$  und die aus ihnen berechneten Zahlen  $n$  der Elektronen in der Volumeinheit des Oxydes zusammengestellt, dann folgen die Konstante  $B$  der Formel, die zum Verlassen des Drahtes notwendige Energie  $\Phi$  eines Elektrons und die Potentialsprünge  $\delta\varphi$  an der Oberfläche des Drahtes. Die Zahlen der ersten Spalte verstehen sich für die Stromdichten.

Tabelle VI.

Oxyd von	$A$	"	$B$	$\Phi$	$\delta\varphi$
Ba	$141 \cdot 10^{15}$	$20\,000\,000 \cdot 10^{15}$	$41,6 \cdot 10^3$	$5,60 \cdot 10^{-12}$ erg	3,58 Volt
Sr	152 "	$21\,000\,000$ "	44,9 "	6,045 "	3,67 "
Ca	129 "	$18\,000\,000$ "	40,8 "	5,43 "	3,48 <sup>1)</sup> "
Mg	$1,01 \cdot 10^{10}$	0,14 "	39,5 "	5,32 "	3,40 "
Be	$0,31 \cdot 10^{10}$	$0,043 \cdot 10^{15}$	$23,9 \cdot 10^3$	$3,22 \cdot 10^{-12}$ erg	2,06 Volt
Y	$5590 \cdot 10^{10}$	$780 \cdot 10^{15}$	$36,3 \cdot 10^3$	$4,89 \cdot 10^{-12}$ erg	3,13 Volt
La	206 "	29 "	37,9 "	5,10 "	3,26 "
Al	1,92 "	0,27 "	37,3 "	5,02 "	3,21 "
Zr	1970 "	270 "	36,6 "	4,92 <sub>5</sub> "	3,15 "
Th	10,5 "	1,5 "	35,6 "	4,79 "	3,06 "
Ce	586 "	82 "	37,1 "	5,00 "	3,20 "
Zn	0,0919 "	0,013 "	35,1 "	4,72 "	3,02 "
Fe	$1070 \cdot 10^{10}$	$150 \cdot 10^{15}$	$46,9 \cdot 10^3$	$6,31 \cdot 10^{-12}$ erg	4,04 Volt
Ni	8370 "	1200 "	51,2 "	6,89 "	4,41 "
Co	1590 "	2200 "	49,7 "	6,69 "	4,28 "
Cd	$0,112 \cdot 10^{10}$	$0,016 \cdot 10^{15}$	$30,2 \cdot 10^3$	$4,065 \cdot 10^{-12}$ erg	2,60 Volt
Cu	0,00105 "	0,00015 "	22,5 "	3,03 "	1,94 "

1) F. Deininger (l. c.) fand für  $\text{CaO}$ :  $\delta\varphi = 3,6$  Volt.

Die Oxyde sind in dieser Tabelle so geordnet wie die Metalle selbst in der Spannungsreihe aufeinander folgen. Wie man sieht, ordnen sich mit Ausnahme von Beryllium und den magnetischen Metallen Eisen, Nickel, Kobalt, auch die Konstanten  $B$  und damit die  $\delta\varphi$  in dieser Weise und zwar bei Berücksichtigung der Größe der Messungsfehler sehr gut.

Die Ausnahmestellung von Eisen, Nickel und Kobalt könnte damit begründet werden, daß sie in dieser Tabelle die einzigen höherwertigen Elemente sind. Auch ist über die Stellung ihrer Oxyde in der Spannungsreihe nichts weiter bekannt. Bei Eisen käme noch hinzu, daß das Oxyd bei Weißglut zum Teil in das stark magnetische Oxyduloxyd übergeht. Falls es nicht bei diesen Temperaturen seinen Magnetismus verloren hat, könnte es durch den Heizstrom stark magnetisiert sein, so daß sich besonders starke elektrodynamische Wirkungen auf das entweichende Elektron ergeben müßten.

Wir haben angenommen, daß die beim Austritt der Elektronen aus dem Wirkungsbereiche der Oxydschicht geleistete Arbeit vollständig elektrischer Art ist, daß also  $\delta\varphi$  dem Potentialsprung einer Doppelschicht an der Grenze Oxyd-Vakuum entspricht. Augenscheinlich muß die positive Beladung dieser Doppelschicht nach dem Oxyd hin liegen, da ja negativ geladene Teilchen am Entweichen gehindert werden, demzufolge müssen die elektropositiven Stoffe ein größeres  $\delta\varphi$  aufweisen, als die elektronegativen. Obige Tabelle bestätigt diese Folgerungen.

Andererseits sehen wir aus Tab. VI, daß die elektropositiven Stoffe durchschnittlich die größere Zahl freier Elektronen enthalten. Daher erklärt es sich, daß, wie Tabb. IV und V zeigen, die elektropositiven Stoffe im allgemeinen größere Ströme abgeben, obwohl bei ihnen ein größerer Energiegehalt der Elektronen zum Entweichen erforderlich ist, als bei den elektronegativen Stoffen.

Es liegt nahe, die hier gefundene Zahl der Elektronen mit der Zahl der Moleküle zu vergleichen. Letztere ist nun durchweg mehrere Zehnerpotenzen größer ( $10^3$  bis  $10^8$  mal). Aber abgesehen davon, daß nach den oben berechneten Fehlergrößen eine Übereinstimmung auf das Zehnfache noch zulässig wäre, muß doch bemerkt werden, daß aus allgemeinen Gründen

eine Übereinstimmung zwischen beiden Zahlen im Gegenteil überraschen müßte.

Denn im Falle glühender Körper hat man es wohl mit den Elektronen zu tun, die im Metall als Träger der Wärme- und Elektrizitätsleitung auftreten und sich jedenfalls im Zustande einer gewissen Unordnung befinden. Sie haben demnach mit den an einen festen Schwerpunkt gebundenen, schwingungsfähigen Elektronen in den Molekülen, deren Zahl natürlich von der gleichen Ordnung wie die der Moleküle sein muß, nichts zu tun, sind vielmehr „freie“ Elektronen.

Aus diesem Grunde ist auch ein zu weit gehender Vergleich zwischen der Elektronenemission glühender Körper und dem Photoeffekt nicht angebracht, denn bei letzterem handelt es sich augenscheinlich um schwingungsfähige Elektronen.

#### Theoretische Betrachtungen.

*Sitz und Art der Austrittsarbeit.* Man muß bedenken, daß im allgemeinen die durch Gleichung (4) eingeführte Annahme, die vom Elektron geleistete Arbeit werde zum Durchsetzen eines Grenzpotentials verbraucht, keineswegs von vornherein selbstverständlich ist.

Wie die Arbeiten von J. Koenigsberger<sup>1)</sup> u. a. über die Elektrizitätsleitung in festen Körpern zeigen, muß bei der Erhöhung der Temperatur eine gewisse Arbeit geleistet werden, um im Innern des Oxydes Stromträger zu bilden, also wohl um Elektronen vom Atom abzuspalten. Dann würde sich also die hier gemessene Arbeit  $\Phi$  aus zwei Teilen zusammensetzen, von denen der erste im ganzen Volumen, der zweite nur an der Oberfläche geleistet wird.

Sollte dies zutreffen, so können wir mit O. W. Richardson annehmen, daß der erste Teil vom Molekularvolumen abhängig ist und zwar müßte wohl die Dissoziationsarbeit umgekehrt proportional zum Moleküldurchmesser sein, d. h. umgekehrt proportional zur Kubikwurzel aus dem Molekularvolumen. Dies stimmt aber in keiner Weise mit der Erfahrung überein. So ist z. B. für Calciumoxyd bei einem Molekularvolumen von 17,5

1) J. Koenigsberger, Zusammenfassender Bericht; Jahrbuch der Radioaktivität 4. p. 158. 1907.

die Konstante  $B = 40300$ , für Zinkoxyd müßte dann bei einem Molekularvolumen von 14,4 gefunden werden  $B = 43000$ . Es ergab sich aber 30200, also sogar kleiner statt größer.

Es scheint also, als ob im Innern des Oxyds bereits frei vorhandene Elektronen durch die Oberflächenschicht hindurchgetrieben werden, wobei die gemessene Arbeit  $\Phi$  ausschließlich an der Oberfläche geleistet wird. Anderenfalls müßte sich auch die Zahl der Elektronen in der Volumeinheit mit der Temperatur ändern. Hierfür, und ebenso für eine Abhängigkeit der Austrittsarbeit von der Temperatur fehlt infolge der guten Übereinstimmung von Beobachtung und Theorie jeder Anhalt.

*Die hemmenden Kräfte.* Von einer etwaigen „osmotischen“ Arbeit sei hier abgesehen und die Austrittsarbeit unter der Voraussetzung betrachtet, daß sie rein elektrischer Art ist. Auch dann wird sie sich aus mehreren Teilen zusammensetzen. Lenard<sup>1)</sup> zieht für die Photoionen drei Möglichkeiten in Betracht:

1. „Elektrische Doppelschichten an den Oberflächen“.
2. „Eine spezifische Anziehung zwischen Leiter und Elektrizität, etwa wie sie v. Helmholtz<sup>2)</sup> zur Erklärung der Metallkontakt-Potentialdifferenzen annahm“.
3. „Die wohl zweifellos vorhandene elektrische Kraft zwischen den entweichenden Elektronen und ihren elektrischen Bildern an der Oberfläche“.

Dazu mag in diesem Falle noch die Diffusion, sowie das elektrische und das magnetische Feld des Heizstroms kommen.

In den beiden ersten Fällen wird die Grenzenergie mit der Natur des Oxyds sich verändern. Dieser Teil würde bewirken, daß die Stoffe sich nach der Spannungsreihe ordnen.

Der dritte Teil, „die Bildkraft“, ist ebenso wie die anderen Einflüsse an allen Stoffen gleich (über eine eventuelle Ausnahme an Eisen vgl. oben) und würde daher die für das Kontaktpotential gefundenen Werte ohne ihre Reihenfolge zu ändern, gegen die wirklichen um einen konstanten Betrag heraufsetzen.

Die Verhältnisse, die sich aus diesen sogenannten „Thomson'schen Bildern“ ergeben, kann man nun leicht rechnerisch

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. p. 185. 1902.

2) H. v. Helmholtz, „Erhaltung der Kraft“, Ostwalds Klassiker Nr. I, p. 35.



verfolgen. Bezeichne  $e$  die Ladung eines Elektrons,  $a$  seinen Abstand von der Drahtoberfläche, so wird, solange seine Geschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit und der Abstand  $a$  klein gegen den Drahradius ist, ein Elektron vom Draht mit der Kraft angezogen

$$(11) \quad \mathfrak{F}_1 = \frac{e^2}{4a^2}.$$

Bezeichne ferner  $R$  den Radius des Zylinders,  $r$  den des Drahtes und  $\varphi$  die Potentialdifferenz zwischen Draht und Zylinder, so ist die vom elektrischen Felde auf das Elektron ausgeübte Kraft

$$(12) \quad \mathfrak{F}_2 = \frac{e\varphi}{(r+a) \ln \frac{R}{r}}.$$

Aus der Gleichsetzung beider Kräfte finden wir die Dicke  $a$  der Schicht innerhalb der die vom Draht ausgesandten Elektronen nicht mehr vom Feld zum Zylinder fortgeführt werden können.

$$(13) \quad a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{er \ln \frac{R}{r}}{\varphi}}.$$

Bei den Dimensionen des benutzten Rohres wird:

$$\text{für } \varphi = 20 \text{ Volt} \quad a = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ cm},$$

$$,, \quad \varphi = 100 \text{ Volt} \quad a = 0,7 \cdot 10^{-5} \text{ cm}.$$

Das sind Größen, die bei weiten die molekularen Dimensionen übertreffen. Innerhalb dieser Schicht werden sich die Elektronen anhäufen und können dort, ohne daß wir es zu bemerken brauchen, auch bei Zimmertemperatur vorhanden sein.

Falls diese Schichtdicke kleiner als die freie Weglänge ist — was bei ungefähr einer halben Atmosphäre eintritt — kann man den Potentialsprung  $\delta\varphi'$  berechnen, der die entweichenden Elektronen in gleichem Maße wie die Schicht zurückhalten würde. Wenn  $a_0$  den Abstand des Punktes bedeutet, von dem das Elektron ausgeht, ist

$$(14) \quad e\delta\varphi' = \int_{a_0}^{a_1} \frac{e^2}{4a^2} da,$$

$$(14a) \quad \delta\varphi' = \frac{e}{4} \left| \frac{1}{a} \right|_{a_1}^{a_0}.$$



Setzen wir  $a_0 = 3 \cdot 10^{-8}$  cm, also ungefähr gleich der Wirkungssphäre eines Moleküls, so wird

$$\delta \varphi' = 1,2 \text{ Volt.}$$

Die aus den Konstanten  $B$  berechneten Potentialsprünge sind also etwa  $1-1\frac{1}{2}$  Volt zu groß.

*Geschwindigkeit im Oxyd.* Die Geschwindigkeit der Elektronen im Metalloxyd, die notwendig ist, um den Potentialsprung  $\delta \varphi$  durchsetzen zu können, ergibt sich aus

$$\frac{m}{2} v^2 > e \delta \varphi$$

bei einem mittleren Wert von  $\delta \varphi = 3$  Volt zu:

$$v > 10,2 \cdot 10^7 \text{ cm/sec.}$$

Man kann damit die Geschwindigkeit der Elektronen im Metall vergleichen, wie sie sich aus der Drudeschen Theorie ergibt. Drude<sup>1)</sup> setzt für die mittlere Energie eines Elektrons

$$\frac{m}{2} \bar{v}^2 = \alpha T,$$

$$\alpha = \frac{3}{2} k = 2,02 \cdot 10^{-16} \text{ erg/Grad}$$

ist. Daraus folgt für

$$\begin{array}{ccc} T = 1000^\circ \text{ C.} & \bar{v} = 2,37 \cdot 10^7 \text{ cm/sec,} \\ 1500 & 2,81 & \text{''} \end{array}$$

Der Größenordnung nach stimmen diese Werte mit dem oben aus den Messungen berechneten auch in sofern überein, als die Zahl der Elektronen im Metall, die die „kritische“ oder eine noch höhere Geschwindigkeit besitzen, notwendigerweise sehr klein sein muß gegen die überhaupt vorhandene Zahl. Also muß auch die mittlere Geschwindigkeit kleiner als die kritische sein.

*Austrittsgeschwindigkeit.* Über die Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen wird bei diesen Betrachtungen gar nichts ausgesagt. Man kann nur folgern, daß sie nach Verlassen des Metalls alle möglichen Geschwindigkeiten von 0 bis etwa zur Größenordnung  $10^8$  cm/sec haben können, daß aber die kleinen Geschwindigkeiten stark überwiegen müssen, so daß von einer

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 1. p. 566. 1900.

Geschwindigkeitsverteilung nach dem Maxwell'schen Gesetz keine Rede sein kann. Eine obere Grenze ergibt sich daraus, daß nach J. Stark<sup>1)</sup> die Ionisierungsspannung für negative Elektronen im Quecksilberdampf 8 Volt beträgt. Die Energie der entwichenen Elektronen muß also kleiner sein, als die, die sie bei einem freien Fall durch 8 Volt erlangen konnten, also

$$v < 17 \cdot 10^7 \text{ cm/sec.}$$

Die mittlere<sup>2)</sup> Austrittsgeschwindigkeit der Elektronen kann man aber genau berechnen. O. W. Richardson<sup>3)</sup> hat nämlich für die Energie, die die Elektronen dem glühenden Metall entführen, die Formel abgeleitet:

$$(15) \quad U = n \left\{ 1 + \frac{\Phi}{2RT} \right\} \sqrt{\frac{2R^2 T^3}{\pi m}} e^{-\frac{\Phi}{RT}},$$

worin die Bezeichnungen dieselbe Bedeutung wie in der oben benutzten Formel haben. Diese Gleichung ergibt sich ohne weiteres, wenn man die Zahl der entweichenden Elektronen noch vor der Integration mit ihrer kinetischen Energie  $\frac{m}{2} \cdot (u^2 + v^2 + w^2)$  multipliziert. Dieser Energieverlust setzt sich aus zwei Teilen zusammen, der Arbeit, die beim Durchsetzen der Oberfläche geleistet wird und der lebendigen Kraft, die die bereits entwichenen Elektronen infolge ihrer Austrittsgeschwindigkeit noch enthalten. Diesem Gedanken von Richardson folgend ergibt sich, wenn man Gleichung (15) mit der oben vielfach benutzten und bestätigten Formel (2) verbindet, für die gesamte Energie der Elektronenmission die Beziehung:

$$(16) \quad U = \left[ 1 + \frac{\Phi}{2RT} \right] N \cdot 2RT,$$

also:

$$(17) \quad U = N\Phi + N \cdot 2RT.$$

Hier ist der erste Teil die beim Durchsetzen der Oberfläche geleistete Arbeit. Für die Energie eines einzelnen Elektrons nach seinem Austritt bleibt also:

$$(18) \quad \frac{m}{2} \bar{u}^2 = 2RT,$$

1) J. Stark, Handb. d. Phys. IV p. 500.

2) d. h. die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat.

3) O. W. Richardson, l. c. p. 502, Formel (9).

$$(19) \quad \bar{u} = 2 \sqrt{\frac{RT}{m}}.$$

Dies ergibt als mittlere Austrittsgeschwindigkeit:

bei  $T = 700^\circ \text{C.}$   $\bar{u} = 2,40 \cdot 10^7 \text{ cm/sec.}$

1200	2,95	„
1700	3,42	„

P. Lenard<sup>1)</sup> fand, daß von den Elektronen des Photoeffektes mit normalen Geschwindigkeitskomponenten von 0 bis  $4 \cdot 10^7 \text{ cm/sec}$  etwa 65—70 Proz. austreten und gibt an, daß diese Zahl wahrscheinlich noch etwas zu klein ist. Dies kann man wohl als eine sehr gute Bestätigung obiger Rechnung ansehen.

*Energie der Emission.* Es ist noch von Interesse, die Energie, die die Elektronenemission eines glühenden Metalles mit sich führt, mit der Energie der Strahlungsemission zu vergleichen. Im folgenden ist nach Formel (16) und den in Tab. IV. mitgeteilten Messungen die Energie der Elektronenemission  $E$  für Calciumoxyd berechnet, und mit der Strahlungsenergie  $S$  des schwarzen Körpers verglichen.

$T$	$E \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}$	$S \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}}$	$E/S$
1050° C.	$0,335 \cdot 10^4$	$1,628 \cdot 10^8$	0,002 Proz
1500	$0,0911 \cdot 10^8$	5,26 „	1,7 „
1700	$1,011 \cdot 10^8$	8,07 „	12,5 „

Der erste Wert von  $E$  ist noch als ausgeprägter Sättigungsstrom beobachtet worden. Die beiden anderen sind nach der Formel extrapoliert. Die Energie der Elektronenemission steigt sehr viel schneller als die Strahlungsenergie mit der Temperatur an, so daß sie bei  $2000^\circ \text{C.}$  diese schon bedeutend übertreffen würde. Man wird also bei sehr hohen Temperaturen den Energieverlust eines Körpers abhängig von dem Vorzeichen seiner elektrischen Aufladung finden müssen.

1) P. Lenard, l. c. p. 184.

**Zusammenfassung.**

1. Es wird die Abgabe negativer Elektrizität von ca. 20 glühenden Metalloxyden im Vakuum untersucht und die Zahl der Elektronen in der Volumeinheit sowie die Potentialsprünge an den Oberflächen berechnet.
2. Die Oxyde ordnen sich hinsichtlich der Potentialsprünge nach der Spannungsreihe.
3. Die elektropositiven Stoffe enthalten mehr freie negative Elektronen als die elektronegativen Stoffe. Die Arbeit, die ein Elektron beim Entweichen zu leisten hat, ist bei den elektropositiven Stoffen größer.
4. Die zum Austritt eines Elektrons erforderliche Arbeit wird nur an der Oberfläche geleistet.
5. Die Geschwindigkeiten der Elektronen stehen im Einklang mit der Drudeschen Theorie und Beobachtungen von Lenard am Photoeffekt.
6. Die Energie der Elektronenemission wird mit der Strahlungsenergie verglichen.

Vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität Berlin auf Anregung und unter Leitung von Herrn Prof. Dr. Wehnelt ausgeführt, dem ich ebenso wie Herrn Geh.-Rat Prof. Dr. Rubens hierfür und für vielfache Unterstützung meinen besten Dank ausspreche.

(Eingegangen 28. Juli 1908.)

**8. Über den Einfluß der Reibung  
auf die Schwingungen einer mit Flüssigkeit  
gefüllten Kugel;  
von Rudolf Ladenburg.**

(Hierzu Taf. V.)

**Einleitung.**

Die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit innerhalb eines von festen Körpern umschlossenen Raumes wird bedingt durch die *innere* Reibung, die die Flüssigkeitsteile aufeinander ausüben, und durch die *äußere* Reibung, die zwischen der Flüssigkeit und den sie begrenzenden festen Körpern wirkt. Während jene für jede Flüssigkeit eine spezifische Größe ist, ergibt sich für diese nach fast allen bisherigen Beobachtungen<sup>1)</sup> derselbe Wert *unendlich* für jede inkompressible Flüssigkeit und bei jedem beliebigen festen Körper, mit dem die Flüssigkeit in Berührung sein mag; mit anderen Worten, die einem festen Körper anliegende Flüssigkeitsschicht hat bei allen nicht turbulenten Bewegungen dieselbe Geschwindigkeit wie dieser. Nur in dem von Helmholtz-Piotrowski<sup>2)</sup> be-

1) Vgl. E. Warburg, Pogg. Ann. **140**. p. 367. 1870 (Strömung von Quecksilber durch Glaskapillaren); M. Couette, Ann. de chim et phys. (3) **21**. p. 433. 1890 (Rotation verschiedener Flüssigkeiten zwischen Zylindern, N. Petrow (Bull. d. K. Akad. d. Wiss. zu Petersburg **5**. p. 368. 1896) folgert freilich aus Couettes Versuchen z. B. für Rapsöl einen endlichen Koeffizienten der äußeren Reibung); W. König, Wied. Ann. **32**. p. 193. 1887 (Schwingungen einer Kugel in verschiedenen Flüssigkeiten); K. Mützel, Wied. Ann. **43**. p. 15. 1891 (Schwingungen eines mit Wasser gefüllten Zylinders); E. T. Allen, Phil. Mag. (5) **50**. p. 323. 1900 (Aufsteigen von Luftblasen in Wasser); R. Ladenburg, Ann. d. Phys. **22**. p. 287. 1907 (Fallen von Kugeln in zähen Flüssigkeiten).

2) H. v. Helmholtz u. G. Piotrowski, Wiener Ber. **50**. (2) p. 607. 1860, abgedruckt in H. v. Helmholtz' Wissensch. Abh. **1**. p. 172; vgl. auch A. Umani (Il Nuovo Cimento (4) **3**. p. 137. 1896), der aus Versuchen mit Quecksilber in schwingenden Hohlgefäßen den Schluß zieht, daß die äußere Reibung des Quecksilbers an vernickelten, also nicht benetzten Oberflächen endlich ist.

handelten Fall der drehenden Schwingungen einer mit Flüssigkeit gefüllten Metallkugel in Luft ergab sich für die äußere Reibung ein endlicher Wert. Auf Veranlassung von Helmholtz beobachtete nämlich Piotrowski Schwingungsdauer und Dekrement eines mit Wasser gefüllten Glasgefäßes, das an zwei Drähten aufgehängt drehende Schwingungen um eine vertikale Achse ausführte, und zwar einmal wenn die Glasoberfläche unverändert und dann, wenn sie innen versilbert war: da sich im letzteren Falle ein um mehrere Prozente kleineres Dekrement ergab, schloß Helmholtz, daß bei derartigen Bewegungen Wasser an Metalloberflächen nicht haftet. Helmholtz führte dann die Theorie der Bewegung einer Flüssigkeit innerhalb einer schwingenden Hohlkugel vollständig durch für den Fall eines von Null verschiedenen Gleitungskoeffizienten<sup>1)</sup> und ließ von Piotrowski sehr sorgfältige Messungen an einer Metallhohlkugel ausführen. Die Experimente bestätigten insofern die Hypothese des Gleitens, als sie für den Gleitungskoeffizienten Wasser-Gold den Wert 0,235 cm ergaben; der zugleich abgeleitete Koeffizient der inneren Reibung des Wassers stimmte freilich nur bis auf etwa 40 Proz. mit dem von Poiseuille aus Strömungsversuchen gefundenen überein.<sup>2)</sup> Auf diesen Widerspruch zwischen den Resultaten von Helmholtz-Piotrowski und denen anderer Beobachter machte Wetham<sup>3)</sup> im Jahre 1890 aufmerksam; indem er berechnete, daß ein Gleitungskoeffizient von der Größe, wie ihn Helmholtz-Piotrowski finden, einen sehr merklichen Einfluß auf das Strömen von Wasser durch Metallkapillaren ausüben müßte, führte er Transpirationmessungen in Glaskapillaren aus, die innen versilbert, und in solchen, die unversilbert waren, konnte jedoch keinen Unterschied konstatieren, der die Versuchsfehler von wenigen Promille überschritt. Wetham studierte dann auch drehende Schwingungen von versilberten und unversilberten Glashohlkörpern, die mit Wasser gefüllt waren, konnte aber auch hier die Helmholtz-Piotrowskischen Resultate

1) Dieser wird definiert als Verhältnis des Koeffizienten der inneren zu dem der äußeren Reibung.

2) Vgl. hierzu p. 183 u. 184 der vorliegenden Arbeit.

3) W. C. D. Wetham, Phil. Trans. A. 181. p. 559. 1890.

nicht bestätigen. Mit der Theorie und den Experimenten der mit Wasser gefüllten Hohlkugel hat er sich nicht näher beschäftigt.

Zur Entscheidung der vorliegenden Frage<sup>1)</sup> habe ich zunächst die Versuche in versilberten und unversilberten Glasgefäßen unter möglichst genau denselben Bedingungen wie Piotrowski wiederholt.

#### I. Versuche in innen versilberten und unversilberten Glasgefäßen.

In einem gegen Temperaturschwankungen gut geschützten Kellerraum des Instituts hing ich innerhalb eines Glaskastens an zwei Messingdrähten ein Fläschchen von etwa 200 ccm Inhalt, wie es zum Aufbewahren chemischer Reagenzien benutzt wird (vgl. Helmholtz' Wissensch. Abh. 1. p. 173), mitsamt einer horizontalen Stange auf. Diese Stange trug einen kleinen Spiegel und zwei Gewichte, die dem System eine Schwingungsdauer (Hin- und Rückgang) von etwa 24" verliehen — alles möglichst genau wie bei Piotrowski. Das Ganze wurde mit Hilfe einer einfachen elektromagnetischen Einrichtung, die ohne merkbare Nachwirkungen wirkte (vgl. p. 173), in reine drehende Schwingungen versetzt; die Umkehrpunkte mit Fernrohr und Skala beobachtet, die Schwingungsdauern durch Messung der Momente des Durchganges durch die Ruhelage mit Stoppuhr oder Metronom bestimmt. Daß die auf diese Weise gefundene Dämpfung wesentlich durch das im Fläschchen enthaltene Wasser hervorgerufen wurde, zeigten Messungen mit leeren Fläschchen, in denen die Dämpfung nur noch etwa den zehnten Teil so groß war.

Bei jedem Versuch wurden etwa 30 Umkehrpunkte bzw. Durchgänge durch die Ruhelage beobachtet und eine größere Zahl von Versuchen bei möglichst derselben Temperatur ausgeführt. Dann wurde das Fläschchen entleert, nach der Liebig'schen oder anderen Methoden (vgl. F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys., 10. Aufl. p. 37) innen versilbert, wieder

1) Vgl. auch W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik, p. 302; ferner Winkelmanns Handbuch der Physik (2. Aufl.) 1. p. 1878 und Lamb, Hydrodynamics (3. Ed.) p. 545.

mit Wasser gefüllt<sup>1)</sup> und die Schwingungsbeobachtungen bei möglichst der gleichen Temperatur wie zuvor ausgeführt.

Die mit einem derartigen Gefäß gewonnenen Zahlenwerte sind in Tab. I enthalten.

Tabelle I.

## Gefäß B.

Temperatur	Logarithmisches Dekrement	Schwingungsdauer	Bemerkungen
19,02° C.	0,024991	(11,69)''	Gefäß versilbert, mit Wasser von 18,0° gefüllt
19,05		11,701	
18,81	0,025060	(11,69)	
18,81	0,025072	(11,69)	
18,92	0,025010	(11,70)	
18,76	0,025078	(11,68)	
18,78		11,698	
18,40		11,692	Gefäß neu mit Wasser von 19,0° gefüllt
19,20° C.	0,024950	(11,65)''	
19,19	0,024957	(11,65)	
19,20		11,660	
19,20		11,679	
19,20	0,024945	(11,65)	
19,20	0,024946	(11,65)	
19,20		11,679	
18,76		11,671	
18,80		11,674	
18,78	0,025067	(11,65)	
18,80° C.	0,002690	13,963''	Gefäß ohne Wasser
18,80	0,002683	13,965	
18,84° C.	0,025055	(11,77)''	Gefäß unversilbert, mit Wasser von 19,0° gefüllt
18,98		11,754	
19,00	0,025007	(11,75)	
19,02	0,024968	(11,72)	
19,04		11,762	
19,04		11,749	
19,02	0,024979	(11,73)	

1) Die Differenz der enthaltenen Wassergewichte bei versilbertem und unversilbertem Fläschchen betrug weniger als ein Zentigramm bei etwa 200 g Wasser.



Tabelle I (Fortsetzung).

Temperatur	Logarithmisches Dekrement	Schwingungsdauer	Bemerkungen
19,14° C.	0,025017	(11,68)''	Gefäß neu mit Wasser von 19,0° gefüllt
19,16	0,025037	(11,65)	
19,19		11,672	
19,19	0,025027	(11,66)	
19,16		11,680	
19,16	0,025023	(11,66)	
19,16		11,680	
19,12		11,679	

Die erste Vertikalreihe gibt die Temperatur nach einem in zwanzigstel Grad geteilten Thermometer, die zweite das logarithmische Dekrement (für die halben Schwingungsdauern in Briggischen Logarithmen ausgedrückt), die dritte die halben Schwingungsdauern. Wurde in einem Versuche aus den Umkehrpunkten das Dekrement bestimmt, so konnte gleichzeitig die Schwingungsdauer nur aus der für alle Schwingungen verbrauchten Zeit berechnet werden; sie ist deshalb nicht so genau wie der bei anderen Versuchen aus den jedesmaligen Durchgangsmomenten berechnete Wert und darum in der Tabelle eingeklammert. Auf gleiche Temperatur reduziert (1° Temperaturerhöhung bewirkte eine Abnahme des Dekrements um 0,75 Proz., die Schwingungsdauern blieben bei kleinen Temperaturänderungen unverändert) betrugen die Abweichungen der Dekremente und der Schwingungsdauern vom Mittel 1–2 Promille. Wurde das Gefäß neu gefüllt und wieder aufgehängt, so war die Schwingungsdauer bisweilen um einige Promille verändert.

Die Mittelwerte der im versilberten und unversilberten Gefäß erhaltenen Zahlen sind in Tab. II zusammengestellt, die gleichzeitig die Resultate zweier weiteren Versuchsreihen mit anderen Gefäßen, die auch nach anderen Methoden versilbert waren, enthält.

Tabelle II.

Gefäß A.

Temperatur	Logarithmisches Dekrement	Schwingungsdauer	Bemerkungen
19,00°	0,019570 ± 2	11,978'' ± 2	Unversilbert
19,00	0,019642 ± 3	12,049 ± 2	Versilbert
19,00	0,019620 ± 3	11,990 ± 1	Unversilbert

Gefäß B.

19,00°	0,025026 ± 25	11,716'' ± 4	Unversilbert
19,00	0,025011 ± 15	11,688 ± 2	Versilbert

Gefäß C.

19,00°	0,025163 ± 3	11,893'' ± 12	Unversilbert
19,00	0,025162 ± 2	11,870 ± 2	Versilbert

Wie mir scheint, zeigen diese Versuche zweifellos, daß innerhalb der erreichten Genauigkeit eine Versilberung der inneren Gefäßwand keinen Einfluß auf das Dekrement oder die Schwingungsdauer ausübt: wenn also die äußere Reibung des Wassers an reinem Glase unendlich groß ist, muß sie es auch an versilbertem Glase sein.

Man ist also gezwungen anzunehmen, daß bei den Versuchen Piotrowskis äußere Einflüsse eine Wirkung der Versilberung vorgetäuscht haben — wie Piotrowski ja auch selbst diese Möglichkeit nicht vollkommen ausschließt (l. c. p. 179), während allerdings Helmholtz auf diese Ergebnisse als ganz überzeugend ausdrücklich hinweist (l. c. p. 174).

## II. Theorie der Bewegung einer Flüssigkeit in einer schwingenden Hohlkugel bei unendlich großer äußerer Reibung.

Ich ging dann dazu über, auch die Erscheinungen innerhalb einer Hohlkugel, die theoretisch vollständig behandelt werden können, zu studieren. Und zwar habe ich zunächst die

Theorie für den Fall durchgeführt, daß die Flüssigkeit an der Kugeloberfläche nicht gleitet, sondern fest haftet: dieser Fall ist weder von Helmholtz noch, soweit mir bekannt geworden ist, von anderer Seite bisher untersucht worden. Auch die Resultate der Arbeit von Zemplén<sup>1)</sup> konnte ich nicht benutzen, der aus den Schwingungen einer Kugel innerhalb einer sie umschließenden Hohlkugel die innere Reibung des zwischen ihnen befindlichen Gases bestimmte. Zemplén setzt zwar unendlich große äußere Reibung voraus; aber abgesehen davon, daß seine Grenzbedingungen infolge der zwei begrenzenden Kugeloberflächen wesentlich von den in unserem Fall vorhandenen abweichen, ist in der Lösung der ursprünglichen Differentialgleichungen ein Fehler untergelaufen, den Hr. Zemplén, wie er mir brieflich mitteilte, demnächst selbst zu berichtigen beabsichtigt.

Die Integration der Differentialgleichungen und manche Detailrechnungen des vorliegenden Problems sind in der Untersuchung von Helmholtz bereits enthalten. Ich werde mich deshalb, soweit zugänglich, mit der Wiedergabe der Helmholtzschen Resultate<sup>2)</sup> begnügen und mich überhaupt möglichst eng an seine Berechnungen anschließen, bis die Einführung der neuen Randbedingung das Verlassen des Helmholtzschen Weges notwendig macht.

Wir gehen aus von den allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen der Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit, die der Reibung unterworfen ist:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ Y - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} - k^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ Z - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} - k^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \end{cases}$$

hierin bedeuten  $x, y, z$  die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im Innern der bewegten Flüssigkeit;  $u, v, w$  seine

1) Győző Zemplén, Ann. d. Phys. 19. p. 783. 1906.

2) l. c. p. 196—214.

Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit  $t$ ;  $X, Y, Z$  die Komponenten der äußeren Kraft,  $p$  den Druck,  $h$  die Dichte und  $k^2 h$  den Koeffizienten der inneren Reibung der Flüssigkeit, (letzterer wird auch häufig durch *einen* Buchstaben,  $\eta$ , bezeichnet). Wirkt als äußere Kraft nur die Schwerkraft in Richtung der negativen  $z$ -Achse und vernachlässigt man die Produkte  $u(\partial u / \partial x) \dots w(\partial w / \partial z)$ , die sogenannten quadratischen Glieder, so vereinfachen sich die Gleichungen (1) in die folgenden

$$(1a) \quad \begin{cases} -\frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ -\frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} - k^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ -g - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} - k^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{cases}$$

Das vorliegende Problem können wir nun so formulieren, daß wir verlangen, diejenigen Lösungen der Gleichungen (1a) und (2) zu finden, die den zwei Randbedingungen genügen, daß

$$1. \text{ für } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r = 0$$

die Bewegung nicht diskontinuierlich wird und daß im Gegensatz zu Helmholtz

$$2. \text{ für } r = \text{const.} = R$$

die Winkelgeschwindigkeit einen vorgeschriebenen Wert  $\psi$  besitzt.<sup>1)</sup>

Offenbar (vgl. Helmholtz l. c.) sind nun

$$(3) \quad u = -y\psi, \quad v = x\psi, \quad w = 0$$

partikuläre Integrale der Gleichungen (1a) und (2), die die Flüssigkeitsbewegung als Rotation konzentrischer Kugelschalen mit der Winkelgeschwindigkeit  $\psi$  darstellen. Unter Zugrundelegung der Randbedingung (1) lassen sich, wie Helmholtz l. c. zeigt, die Gleichungen (3) befriedigen durch den Ausdruck

$$(4) \quad \begin{cases} \psi = \frac{\Delta \sqrt{m}}{k r^2} [e^{i r - \beta t} \cos(\sigma r + \gamma t + \epsilon) + e^{-i r - \beta t} \cos(\sigma r - \gamma t - \epsilon)] \\ - \frac{\Delta}{r^2} [e^{i r - \beta t} \cos(\sigma r + \gamma t) - e^{-i r - \beta t} \cos(\sigma r - \gamma t)], \end{cases}$$

1) Wir betrachten die Bewegung erst von dem Moment an, in dem die durch die erste Ablenkung aus der Ruhelage hervorgerufenen Störungen durch den Einfluß der Reibung verschwunden sind, und deshalb werden keine Anfangsbedingungen für die Zeit  $t = 0$  festgelegt.

in welchem  $\Delta$  eine willkürliche Konstante ist und die übrigen neu eingeführten Zeichen in folgender Weise von den zwei anderen Integrationskonstanten  $\beta$  und  $\gamma$  abhängen:

$$(5) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} 2\varepsilon = -\frac{\gamma}{\beta}, & m = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}, & \cos 2\varepsilon = -\frac{\beta}{m}, & \sin 2\varepsilon = \frac{\gamma}{m}, \\ \sigma = \frac{\sqrt{m}}{k} \cos \varepsilon, & \tau = \frac{\sqrt{m}}{k} \sin \varepsilon. \end{cases}$$

Mit dieser Flüssigkeitsbewegung haben wir nun mittels der Randbedingung (2) die Bewegung einer festen Hohlkugel vom Radius  $R$  zu verknüpfen, die drehende Schwingungen um die  $z$ -Achse ausführen soll, gedämpft durch die Flüssigkeit im Innern und durch die Luft im Außenraume. Das Dekrement  $\Delta$  und die Schwingungsdauer  $T$  dieser Schwingungen sollen der Beobachtung zugänglich sein; bedeutet  $\Omega$  den Ablenkungswinkel aus der Ruhelage zur Zeit  $t$ ,  $\Omega_0$  und  $\Omega_1$  zwei aufeinanderfolgende Maxima der Ablenkung nach derselben Seite, so sind  $\beta$  und  $\gamma$  als Funktionen von  $\Delta$  und  $T$  durch die Gleichungen gegeben

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta = \log \operatorname{nat} \Omega_0 - \log \operatorname{nat} \Omega_1 = \beta T, & \gamma = \frac{2\pi}{T}, \\ \text{so daß} \\ m = \frac{\sqrt{\Delta^2 + 4\pi^2}}{T} & \text{und} \quad \operatorname{tg} 2\varepsilon = -\frac{2\pi}{\Delta} \end{cases}$$

wird.

Für die Bewegung der Hohlkugel können wir dann die Gleichung aufstellen

$$(7) \quad M \frac{d^2 \Omega}{dt^2} + f^2 \Omega = P_F + P_L,$$

indem wir unter  $M$  das Trägheitsmoment, unter  $f^2$  die durch die Aufhängung der Kugel bedingten richtenden Kräfte und unter  $P_F$  und  $P_L$  die Momente der Widerstandskräfte verstehen wollen, die von der eingeschlossenen Flüssigkeit und von der äußeren Luft herrühren. Die Werte von  $\Omega$  und von  $d^2 \Omega / dt^2$  erhalten wir aus der zweiten Randbedingung

$$(8) \quad (\psi)_{r=R} = \psi = \frac{d\Omega}{dt}$$

mit Benutzung des durch Gleichung (4) gegebenen Wertes von  $\psi$ . Vernachlässigen wir nämlich in dieser Gleichung die mit  $e^{-\sigma t}$  multiplizierten Glieder, da diese an der Kugelober-

fläche als klein gegen die anderen Glieder angesehen werden können (vgl. Helmholtz l. c. p. 214 und p. 172 dieser Arbeit), so ergibt sich durch Integration aus der Gleichung

$$(9a) \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{A\sqrt{m}}{kR^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon) - \frac{A}{R^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t)$$

mit Benutzung der Gleichung (5) die folgende

$$(9b) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= \frac{A\sqrt{m}}{kR^2} \frac{1}{m} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t - \varepsilon) \\ &\quad - \frac{A}{R^2} \frac{1}{m} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t - 2\varepsilon), \end{aligned} \right.$$

und es wird

$$(9c) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\Omega}{dt^2} &= \frac{A\sqrt{m}m}{kR^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 3\varepsilon) \\ &\quad - \frac{Am}{R^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon). \end{aligned} \right.$$

Die Größe  $P_F$  der Gleichung (7) läßt sich berechnen als Drehmoment der Reibungskraft der Flüssigkeit an der Kugel aus bekannten theoretischen Betrachtungen über die Kraftkomponenten, die eine bewegte Flüssigkeit auf eine oberflächliche Schicht ausübt, wie dies außer bei Helmholtz<sup>1)</sup> l. c. z. B. bei W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik p. 264 zu finden ist. Es ergibt sich

$$(9d) \quad P_F = -\frac{8}{3} \pi h k^2 R^4 \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R},$$

wobei  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R}$  nach Gleichung (4), wieder durch Vernachlässigung der mit  $e^{-\tau R}$  multiplizierten Glieder, den Wert hat:

$$(9e) \quad \left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R} &= \frac{Am}{k^2 R^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon) \\ &\quad - \frac{3A\sqrt{m}}{kR^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon) + \frac{3A}{R^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t). \end{aligned} \right.$$

Was den Widerstand  $P_L$  der Luft betrifft, so kommt hier, wie Helmholtz ausführlich auseinandersetzt, nur der von der Reibung der Luft herrührende Teil in Betracht, und nicht auch die durch die Mitbewegung von Luft hervorgerufene Vergrößerung des Trägheitsmomentes. Da es sich außerdem

1) Bei Helmholtz (l. c. p. 207) befindet sich in der Gleichung (7c) ein Druckfehler: das Integral ist offenbar von 0 bis  $\pi$  und nicht von 0 bis  $\pi/2$  zu erstrecken, und nur dann ergibt sich obiger Wert von  $P_F$ .

nur um langsame Schwingungen handelt und da überdies dieses Glied nur eine Korrektur im Vergleich zu der viel größeren Wasserreibung bedeutet, so können wir  $P_L$  unbedenklich der Winkelgeschwindigkeit der Kugel proportional setzen:

$$(9f) \quad P_L = -K \cdot \frac{d\Omega}{dt},$$

wobei der Faktor  $K$  vorläufig noch unbestimmt bleibt (seine Berechnung vgl. p. 168). Durch Einsetzen der Werte von  $\Omega$ ,  $d\Omega/dt$ ,  $d^2\Omega/dt^2$ ,  $P_F$  und  $P_L$  aus den Gleichungen (9) in die Bewegungsgleichung (7) der Kugel erhalten wir die gesuchte Koppelung der Bewegung der Flüssigkeit mit derjenigen der Kugel, nämlich die Gleichung:

$$(10) \quad \begin{cases} M e^{xR-\beta t} \left[ \frac{A\sqrt{m}}{kR^2} \cos(\sigma R + \gamma t + 3\varepsilon) - \frac{A}{R^3} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon) \right] \\ + f^2 e^{xR-\beta t} \left[ \frac{A\sqrt{m}}{kR^2 m} \cos(\sigma R + \gamma t - \varepsilon) - \frac{A}{R^3 m} \cos(\sigma R + \gamma t - 2\varepsilon) \right] \\ = -\frac{8}{3} \pi h k^2 R^4 e^{xR-\beta t} \left[ \frac{A}{k^3 R^2} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon) \right. \\ \quad \left. - \frac{3A\sqrt{m}}{kR^2} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon) + \frac{3A}{R^4} \cos(\sigma R + \gamma t) \right] \\ \quad \left. - K e^{xR-\beta t} \left[ \frac{A\sqrt{m}}{kR^2} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon) - \frac{A}{R^3} \cos(\sigma R + \gamma t) \right] \right\} \end{cases}$$

Diese Gleichung (10) muß für alle Werte von  $t$  Gültigkeit haben, falls die Bewegung der Flüssigkeit und die der Kugel in jedem Moment den Grenzbedingungen genügt. Darum wird die zu beobachtende Schwingung<sup>1)</sup> dargestellt durch die zwei Gleichungen, die wir aus (10) erhalten, indem wir die einzelnen Glieder in solche zerlegen, die mit  $\cos(\sigma R + \gamma t - \varepsilon)$ , und solche, die mit dem Sinus desselben Winkels multipliziert sind, und die Summe der betreffenden Faktoren in beiden Fällen einander gleich setzen:

$$(11a) \quad \begin{cases} M m \left( \frac{\sqrt{m}}{k} \cos 4\varepsilon - \frac{1}{R} \cos 3\varepsilon \right) + f^2 \left( \frac{\sqrt{m}}{k m} - \frac{1}{R m} \cos \varepsilon \right) \\ = -\frac{8}{3} \pi h k^2 R^4 \left( \frac{m}{k^2} \cos 3\varepsilon - \frac{3\sqrt{m}}{kR} \cos 2\varepsilon + \frac{3}{R^2} \cos \varepsilon \right) \\ \quad - K \left( \frac{\sqrt{m}}{k} \cos 2\varepsilon - \frac{1}{R} \cos \varepsilon \right) \end{cases}$$

1) Vgl. p. 164 Anm. 1.



und

$$(11b) \quad \begin{cases} Mm \left( \frac{\sqrt{m}}{k} \sin 4\varepsilon - \frac{1}{R} \sin 3\varepsilon \right) + f^2 \frac{1}{Rm} \sin \varepsilon \\ = -\frac{8}{3} \pi h k^2 R^4 \left( \frac{m}{k^2} \sin 3\varepsilon - \frac{3\sqrt{m}}{kR} \sin 2\varepsilon + \frac{3}{R} \sin \varepsilon \right) \\ - K \left( \frac{\sqrt{m}}{k} \sin 2\varepsilon - \frac{1}{R} \sin \varepsilon \right). \end{cases}$$

Die hierin enthaltene GröÙe  $K$  können wir bestimmen, indem wir, ähnlich wie Helmholtz, die Gleichungen (11) auf den Fall anwenden, daß die Kugel mit Luft statt mit einer inkompressiblen Flüssigkeit gefüllt ist. Die Luft ist zwar eine kompressible Flüssigkeit, für die die Gleichung (2) (p. 163) im allgemeinen nicht gültig ist; wie aber Helmholtz ausführlich zeigt, können wir unbedenklich so verfahren, zumal das Glied, das sich auf die Reibung der Luft im Innern der Kugel bezieht, nur eine untergeordnete Rolle spielt. Eine besondere Überlegung (vgl. Helmholtz l. c. p. 210) zeigt ferner, daß „es genügt, das größte Glied des Einflusses allein zu berücksichtigen, indem wir  $1/\sigma R$ , das für bewegliche Flüssigkeiten eine kleine GröÙe ist, auch für die Luftreibung als eine solche annehmen“. Dann vereinfachen sich die Werte von  $\psi$  und  $\partial\psi/\partial r$  an der Kugeloberfläche wesentlich. Es wird nämlich

$$(\psi)_{r=R} = \frac{A\sqrt{m}}{kR^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon)$$

und

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{A m}{k^2 R^2} e^{\tau R - \beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon).$$

Zur Unterscheidung von den Versuchen mit der inkompressiblen Flüssigkeit sollen die GröÙen, die für die Versuche der mit Luft gefüllten Kugel einen anderen Wert haben, im folgenden mit dem Index 0 versehen werden. Dann führen dieselben Überlegungen, die uns zur Aufstellung der Gleichungen (11) geführt haben, zu den Gleichungen

$$(11') \quad \begin{cases} Mm_0 \frac{\sqrt{m_0}}{k_0} \cos 4\varepsilon_0 + f_0^2 \frac{\sqrt{m_0}}{k_0 m_0} = -\frac{8}{3} \pi h_0 k_0^2 R^4 \frac{m_0}{k_0^2} \cos 3\varepsilon_0 \\ - K \frac{\sqrt{m_0}}{k_0} \cos 2\varepsilon_0 \end{cases}$$



und

$$M m_0 \frac{\sqrt{m_0}}{k_0} \sin 4 \varepsilon = - \frac{8}{3} \pi h_0 k_0^3 R^4 \frac{m_0}{k_0^3} \sin 3 \varepsilon_0 - K \frac{\sqrt{m_0}}{k_0} \sin 2 \varepsilon_0,$$

aus denen sich

$$(12) \quad K = - \frac{f^3}{m_0} \frac{\sin 4 \varepsilon_0}{\sin 2 \varepsilon_0} - \frac{8}{3} \pi h_0 k_0 \sqrt{m_0} R^4 \frac{\sin \varepsilon_0}{\sin 2 \varepsilon_0}$$

ergibt.

Somit bleiben in den Gleichungen (11) noch  $M$ ,  $f^2$  und  $k$  unbekannt. Da  $f^2$  aus den Daten der Aufhängung bestimmbar und außerdem, wie weiter unten ausführlich gezeigt werden wird, experimentell durch Schwingungsversuche mit der leeren Kugel sehr genau gefunden werden kann, wollen wir  $M$  und  $k$  als Unbekannte betrachten. Da uns nur die letztere Größe interessiert, eliminieren wir  $M$  aus den Gleichungen (11) und erhalten für  $k$  die Gleichung:

$$\begin{aligned} & f^2 \left[ \frac{\sin 4 \varepsilon}{k^3} - \frac{\sqrt{m}}{k m R} (\sin 3 \varepsilon + \sin 5 \varepsilon) + \frac{\sin 4 \varepsilon}{m R^2} \right] \\ &= - \frac{8}{3} \pi h k^3 R^4 \left[ \frac{m \sqrt{m}}{k^3} \sin \varepsilon - \frac{3 m \sin 2 \varepsilon}{k^3 R} + \frac{3 \sqrt{m}}{k R^3} (\sin \varepsilon + \sin 3 \varepsilon) \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{R^3} \sin 2 \varepsilon \right] \\ & - K \left[ \frac{m}{k^3} \sin 2 \varepsilon - \frac{\sqrt{m}}{k R} (\sin \varepsilon + \sin 3 \varepsilon) + \frac{1}{R^2} \sin 2 \varepsilon \right] \end{aligned}$$

oder

$$(13) \quad \begin{cases} 8 \pi h k^4 R \sin 2 \varepsilon - 16 \pi h k^3 R^2 \sqrt{m} \sin 2 \varepsilon \cos \varepsilon \\ + k^3 \left( 8 \pi h R^3 m \sin 2 \varepsilon - \frac{f^2 \sin 4 \varepsilon}{m R^2} - K \frac{\sin 2 \varepsilon}{R^2} \right) \\ - k \left( \frac{8}{3} \pi h R^4 m \sqrt{m} \sin \varepsilon - 2 \frac{f^2 \sqrt{m}}{m R} \sin 4 \varepsilon \cos \varepsilon \right. \\ \quad \left. - 2 K \frac{\sqrt{m}}{R} \sin 2 \varepsilon \cos \varepsilon \right) \\ - f^2 \sin 4 \varepsilon - K m \sin 2 \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Berechnet man die Koeffizienten dieser Gleichung mit Hilfe der im 3. Abschnitt dieser Arbeit enthaltenen Versuchsergebnisse, so ersieht man durch Anwendung des Sturmschen Satzes, daß nur zwei der vier Wurzeln reell und zwar positiv reell sind. Bezieht sich  $k$  auf Wasser von  $20^\circ$ , so zeigt sich ferner, daß die eine Wurzel in unmittelbarer Nähe von 0,1 und die andere zwischen 0,2 und 0,3 liegt. Da nun der Reibungskoeffizient des Wassers dieser Temperatur, wie er z. B. von

Poiseuille bestimmt wurde, ziemlich genau 0,01 ist<sup>1)</sup>, so sieht man, daß als Lösung die kleinste reelle Wurzel der Gleichung (13) zu benutzen ist.

Zur praktischen Berechnung bei beweglichen Flüssigkeiten erhält man eine erste Annäherung von  $k$  durch Fortlassen der mit  $k^4$  und  $k^3$  multiplizierten Glieder und Auflösung der restierenden quadratischen Gleichung; setzen wir zur Abkürzung

$$(14) \quad \begin{cases} a) & 8\pi h R^3 m \sin 2\varepsilon - \frac{f^2 \sin 4\varepsilon}{m R^2} - \frac{K}{R^2} \sin 2\varepsilon = a, \\ b) & \frac{4}{8} \pi h R^4 m \sqrt{m} \sin \varepsilon - \frac{f^2 \sqrt{m}}{m R} \sin 4\varepsilon \cos \varepsilon \\ & - K \frac{\sqrt{m}}{R} \sin 2\varepsilon \cos \varepsilon = b, \end{cases}$$

so erhalten wir<sup>2)</sup>

$$(14c) \quad k = \frac{1}{a} \{b - \sqrt{b^2 + a \cdot (f^2 \sin 4\varepsilon + K m \sin 2\varepsilon)}\}.$$

Hieraus ist  $k^4$  und  $k^3$  berechenbar; bezeichnet  $k'$  den ungenaueren,  $k''$  den genaueren Wert von  $k$ , so wird

$$(14d) \quad \left\{ \begin{aligned} k'' &= \frac{1}{a} \{b - \sqrt{b^2 + a \cdot (f^2 \sin 4\varepsilon + K m \sin 2\varepsilon - 8\pi h k'^4 R \sin 2\varepsilon} \\ &\quad + 16\pi h k'^3 R^2 \sqrt{m} \sin 2\varepsilon \cos \varepsilon)\}. \end{aligned} \right.$$

Auf diese Weise fortfahrend kann man sich dem wahren Wert von  $k$  beliebig nähern.

So erhält man den Reibungskoeffizienten  $k^2 \cdot h$  aus der Beobachtung der Schwingungsdauer und des Dekrementes der mit Flüssigkeit und der mit Luft gefüllten Kugel, da der Wert von  $K$  entsprechend der Gleichung (12) auch aus den zwei letzteren Größen berechenbar ist. Was schließlich noch den Wert von  $f^2$  betrifft, so ist bei bifilarer Aufhängung (vgl. Kohlrausch, Lehrbuch der prakt. Phys. 10. Aufl. p. 112)

$$(15) \quad f^2 = g G \frac{e_1 e_2}{4(l-\delta)} + \frac{2\pi}{5} [E] \frac{\varrho^4}{l},$$

wobei

$$\delta = \varrho^2 \sqrt{\frac{2\pi[E]}{g G}}$$

1) Wie schon oben bemerkt, bezeichnet man das Produkt  $k^2 \cdot h$  als Reibungskoeffizient.

2) Durch Benutzung des negativen Vorzeichens der Quadratwurzel erhalten wir den verlangten kleineren Wert.

gesetzt ist und die Buchstaben folgende Bedeutung haben:  $e_1$  bzw.  $e_2$  sind der untere bzw. obere Abstand der Aufhänge-drähte,  $l$  ihre mittlere Länge,  $\rho$  ihr Radius,  $[E]$  ihr Elektrizitäts-modul;  $G$  ist das Gewicht der aufgehängten festen Teile plus dem halben Gewicht der Drähte und  $g$  die Erdbeschleunigung.

Experimentell genauer bestimmt sich  $f^2$  nach der aus den Gleichungen (11') folgenden Gleichung<sup>1)</sup>

$$(16a) \quad M = \frac{f_0^2}{m_0^2} = \frac{f_0^2}{T_0^2} (4\pi^2 + \Delta_0^2).$$

Wir können nämlich die Gleichung (15) in der Form schreiben

$$f^2 = agG + b,$$

wobei  $a$  und  $b$  für eine bestimmte Aufhängung Konstante sind, unabhängig von den angehängten Massen.<sup>2)</sup> Es handelt sich dann nur noch um deren Bestimmung, die entsprechend der Gleichung (16a) aus drei Schwingungsbeobachtungen der nur mit Luft gefüllten Kugel bei drei verschiedenen Zusatz-trägheitsmomenten bekannter Größe erfolgen kann. Damit die Luftreibung bei verschiedenen Trägheitsmomenten nicht in verschiedenem Grade wirkt, ist es zweckmäßig, konzentrische, genau aufeinander passende Ringe zu benutzen; sind  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  deren Trägheitsmomente, die aus Gewicht und Radien der Ringe in bekannter Weise zu berechnen sind, beziehen sich die Indizes 1, 2 und 3 auf diese drei Fälle, und setzen wir abkürzend

$$\frac{4\pi^2 + \Delta^2}{T^2} = S,$$

so folgt aus

$$M + K_1 = S(agG_1 + b)$$

und zwei entsprechenden Gleichungen

$$(16b) \quad g \cdot a = \frac{(K_1 - K_2)(S_1 - S_2) - (K_1 - K_3)(S_1 - S_3)}{(G_1 S_1 - G_2 S_2)(S_1 - S_3) - (G_1 S_1 - G_3 S_3)(S_1 - S_2)}$$

und

$$(16c) \quad b = \frac{K_1 - K_2 - ag(G_1 S_1 - G_2 S_2)}{S_1 - S_2}.$$

1) Dabei ist das mit dem Reibungskoeffizienten der Luft multiplizierte Glied als unwesentlich fortgelassen.

2) Der im Nenner des ersten Summanden von  $f^2$  vorkommende Ausdruck  $\delta$  enthält zwar das angehängte Gewicht; praktisch genügt aber zu seiner Berechnung ein konstanter Mittelwert von  $G$ .

Zusammengefaßt ergeben sich als Bedingungen, unter denen die abgeleiteten Gleichungen Gültigkeit haben sollen:

1. Die Terme  $u(\partial u / \partial x) \dots, w(\partial w / \partial z)$  sind zu vernachlässigen; dies setzt möglichst kleine Geschwindigkeiten, also praktisch große Schwingungsdauern und kleine Amplituden voraus.

2. Die durch die erste Ablenkung aus der Ruhelage erfolgten Störungen haben sich durch den Einfluß der Reibung ausgeglichen, ein Bewegungszustand, der praktisch durch Konstanz des Dekrementes in die Erscheinung treten muß.

3. Die mit  $e^{-\tau R}$  multiplizierten Glieder der Gleichung (4) sind zu vernachlässigen: praktisch ist

$$\tau = \sqrt{\frac{2\pi}{Tk^2}} \sin \varepsilon$$

zu setzen und  $\varepsilon$  nur wenig von  $45^\circ$  verschieden; für Wasser und für  $R = 5$  cm und  $T = 100''$  (vgl. die folgenden Versuche) ist

$$\tau R \text{ etwa gleich } 8,$$

so daß in der Tat  $e^{-\tau R}$  klein gegen  $e^{\tau R}$  ist<sup>1)</sup>, wenn es sich um Flüssigkeiten von der Zähigkeit des Wassers handelt.

4. Die äußere Reibung ist unendlich groß — die Prüfung dieser Voraussetzung ist der Zweck der vorliegenden Untersuchung.

### III. Versuche mit schwingenden Hohlkugeln.

Zur experimentellen Prüfung der theoretisch abgeleiteten Beziehung für den Reibungskoeffizienten ist es vor allem nötig, die gemachten Voraussetzungen soweit als möglich zu erfüllen. Ich wählte deshalb bei einem Kugelradius  $R$  von 5 cm die Aufhängung und Zusatzträgheitsmomente derart, daß die Schwingungsdauer nicht unter  $100''$  lag; nur dadurch wurde es auch möglich, die Schwingungsdauern mit Sicherheit bis auf wenige zehntel Promille zu messen (vgl. p. 176 ff.).

1) Die mit den positiven und negativen Potenzen multiplizierten Ausdrücke sind von gleicher Größenordnung, so daß es nur auf die Größe der Potenzen selbst ankommt.

Die Details des Schwingungsapparates sind aus der Photographie ( $\frac{1}{5}$  nat. Größe, Taf. V) zu ersehen.

In dem thermisch geschützten Kellerraume, der nur zu den Messungen betreten wurde, war ein großer Glaskasten mit aufgesetzter Glasröhre *G* aufgestellt, der gegen die Strahlung des Beobachters und der Skalenbeleuchtung durch Schirme (in der Photographie fortgelassen) geschützt war; in ihm war ein selbsttätiger Temperaturregulator angebracht (in der Photographie sind *R* die zur regulierenden Gasflamme führenden Röhren und Schläuche, *Q* ist der Quecksilberregulator), so daß die Temperaturschwankungen nicht  $\frac{1}{10}$  Grad überstiegen. An der Decke des Raumes waren an einem Torsionskopf zwei  $1\frac{1}{2}$  m lange Messingdrähte von wenigen Millimetern Abstand (die genauen Zahlen vgl. p. 179) innerhalb der Glasröhre *G* aufgehängt. Diese Drähte waren durch schwaches Ausglühen enttörtet worden und hingen in der endgültigen Lage mehrere Monate vor der Ausführung der definitiven Versuche. An ihnen ist mittels eines Hakens *H* das Schwingungssystem befestigt, dessen wesentlicher Teil ein stabiles Messingkreuz *M*, möglichst symmetrisch gearbeitet, ist. Dieses wiederum trägt an den gegenüberliegenden Enden zweier Arme je einen kleinen Zylinder *Z* von 1,4 cm Höhe und 0,7 cm Durchmesser aus weichem Eisen, die, wie ich mich besonders überzeugte, dem Apparate kein meßbares magnetisches Drehmoment infolge des Erdfeldes gaben; ferner den Spiegel *S*, zwei Gewinde zur Befestigung der Zusatzträgheitsmomente und schließlich die Kugel *K*. Als Zusatzträgheitsmomente dienten vier Ringe (in der Photographie sind zwei Ringe *J* aufgelegt) von 1,2 cm Breite und 0,1 . . . 0,4 cm Höhe, die aus einem einzigen gegossenen und abgedrehten Stück Rotguß geschnitten waren (vgl. p. 171). Die erste Ablenkung des Apparates aus der Ruhelage erfolgte elektromagnetisch durch Schließen eines Stromes, der in mehreren Windungen zwei in symmetrischer Lage zu den Eisenzylindern *Z* innerhalb des Kastens befestigte Stücke *E* aus weichem Eisen umfloß (*D* sind die zu den Elektromagneten führenden Drähte). Zur Vermeidung von remanentem Magnetismus wurde der Strom nach dem Unterbrechen mit Hilfe eines geeigneten Kommutators mehrmals kommutiert und zugleich geschwächt. Daß in der

Tat keine magnetischen Drehkräfte zurückblieben, ergab sich aus der Konstanz des beobachteten logarithmischen Dekrementes (vgl. Tab. III, p. 176—177): es waren nur Schwankungen von einigen Promille zu konstatieren, die auf zufälligen Störungen oder Ablesefehlern beruhten und in der Tat keinen einseitigen Gang zeigten. Diese Konstanz des Dekrementes ist zugleich ein Beweis, daß die durch die erste Ablenkung aus der Ruhelage hervorgerufenen Störungen verschwunden sind, so daß die abgeleiteten Gleichungen für die beobachtete Bewegung Gültigkeit haben (vgl. Bedingung 2 p. 172).

Als Kugeln benutzte ich sowohl eine Glas- als eine Metallkugel (letzte ist in der Photographie, Taf. V, abgebildet) von je 5—6 cm Radius. Die Glaskugel war unter einer größeren Zahl ausgesucht, ihr äußerer Durchmesser schwankte zwischen 11,6 und 11,9 cm. An einer Stelle der Kugel war möglichst unmittelbar eine 2 mm weite Röhre angeblasen, die zum Füllen und Aufhängen der Kugel diente. Da die hierdurch bedingte Abweichung von der Kugelform in unmittelbarer Nähe der Achse der Schwingungen lag, konnte sie keinen merklichen Fehler hervorrufen. Auf die Röhre war eine Messinghülse mit Gewinde aufgekittet; die Gewindemutter trug zentrisch ein in die Röhre eingepaßtes Stück Glas, das bis zur inneren Oberfläche der Kugel reichte und dadurch die Kugelgestalt wahrte, außerdem eine aus der Photographie ersichtliche Vorrichtung *F* zum Aufhängen der Kugel. Aus der Wägung der Kugel mit und ohne Wasser ergab sich ihr Radius zu 5,295 cm.

Um ferner mit einer möglichst vollkommenen Kugel zu arbeiten und zugleich dasselbe Kugelmateriale wie Helmholtz-Piotrowski zu benutzen, ließ ich mir eine Metallkugel anfertigen, die innen, auf Hochglanz poliert, sehr gut spiegelte. Die Kugel wurde, wie aus der Photographie zu ersehen, aus zwei Hälften zusammengesetzt, die aus Messingblech auf eine genau abgedrehte Holzkugel aufgedrückt worden waren. Die überstehenden Ränder konnten mittels sechs Schrauben aufeinander gepreßt werden, so daß die Kugel wasserdicht war. Der Verschluß und die Aufhängung dieser Kugel waren wie bei der Glaskugel. Ich überzeugte mich durch einfache optische Beobachtungen (vgl. auch Helmholtz-Piotrowski, l. c., p. 181), daß nirgends erhebliche Ab-

weichungen von der Kugelform vorhanden waren. Der äußere Durchmesser der Kugel schwankte zwischen 10,05 und 10,02 cm, die doppelte Wandstärke betrug im Mittel 0,10 cm, so daß sich der innere Durchmesser zu  $9,935 \pm 15$  ergab, während der aus dem Wassergewicht berechnete 9,955 cm betrug. Als Versuchsflüssigkeit habe ich reines destilliertes Wasser benutzt.

Die Beobachtungen geschahen mittels Fernrohr und Skala. Die an der Skala abgelesenen Umkehrpunkte konnten direkt zur Berechnung des Dekrementes benutzt werden, da die Skala einen Teil eines Kreises bildete und der Abstand des Spiegels von der Skala gleich dem Radius dieses Kreises (225 cm) gewählt wurde. Die Schwingungsdauern wurden aus den ebenso wie oben (p. 159) beobachteten Durchgangszeiten durch die Ruhelage berechnet, die Abweichungen der Schwingungsmittelpunkte von der Ruhelage betrugen nur wenige zehntel Millimeter, wie aus dem explizite angeführten Beispiele in Tab. III, Vertikalreihe *B* (p. 176), zu ersehen ist. Beobachtete ich durch das Fernrohr während einer Schwingung einen in der Drehachse gelegenen Punkt, so schien er in Ruhe zu sein: ein Beweis, daß das System reine drehende Schwingungen ausführte.

Nachstehende Tab. III, p. 176—177, enthält als Beispiel die Resultate einer Beobachtung, die mit der mit Wasser gefüllten Metallkugel und bei Aufliegen der zwei mittleren Ringe als Zusatzträgheitsmomente ausgeführt wurde.

Die Ruhelage vor dem Versuch war 500,0 mm, die Skalenteile sind Millimeter. Die erste Vertikalreihe *A* gibt die direkt abgelesenen Umkehrpunkte, *B* die aus drei aufeinander folgenden Umkehrpunkten  $A_1, A_2, A_3$  berechneten Schwingungsmittelpunkte; die Zahlen unter *C* stellen die Schwingungsbögen dar und sind aus *A* nach der Formel  $\pm \frac{1}{2}(A_1 - 2A_2 + A_3)$  gebildet, unter *D* sind ihre Briggischen Logarithmen angeführt, unter *E* die Differenzen zweier aufeinander folgender Zahlen der vorhergehenden Kolonne, d. h. die logarithmischen Dekremente; *F* enthält die Mittel aus je zehn Werten, *G* die Differenzen des 1. und 25. Logarithmus, des 2. und 26. Logarithmus usw., jedesmal durch 24 dividiert: die Maximalabweichungen vom Mittel betragen 2 Promille. Unter *H* sind ferner die zwischen



Tabelle III.

A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
898,2							10° 15' 20,3"		19,20°
110,5	499,3	777,6	89076	01161			16 25,7		
877,9	499,4	757,1	87915	01174			17 30,9		
131,1	499,5	736,9	86741	01165			18 36,7		
858,1	499,4	717,4	85576	01158			19 42,0		
150,3	499,6	698,6	84423	01172	011644		20 47,6		
889,6	499,6	680,0	83251	01165			21 53,0		
168,8	499,8	662,0	82086	01165			22 58,5		
821,9	499,7	644,5	80922	01164			24 03,5		
186,0	499,8	627,5	79761	01161			25 09,1		
805,0	499,6	610,8	78590	01171			26 14,1		
202,4	499,7	594,6	77422	01168			27 19,3		
789,0	499,6	578,8	76253	01169			28 24,2		
218,0	499,7	563,5	75089	01166			29 29,7		
774,0	499,8	548,5	73918	01171	011675		30 34,5		
232,9	499,9	534,0	72754	01164			31 41,0		
759,7	499,8	519,8	71584	01170			32 45,8		
246,9	499,9	506,0	70415	01169			33 51,7		
746,1	499,8	492,6	69249	01168			34 57,0		
260,0	499,8	479,7	68088	01161			36 02,4		
732,5	499,8	466,8	66919	01176			37 07,5		
272,5	499,9	453,5	65754	01172			38 12,6		
709,3	499,8	440,3	64589	01176			39 17,7		
288,0	499,9	427,5	63425	01176	011750	011850	41 23,0	130,64"	19,26°
702,0	499,8	414,8	62260	01176			42 28,7	130,67	



260,0	499,8	479,7	68088	01161	011700	011680	41 88,0	180,64"	10,26°
789,2	499,8	466,8	66918	01175	011700	011691	42 88,7	180,67	
378,8	499,0	454,8	65784	01170	011700	011692	43 39,7	180,71	
709,2	499,8	418,8	63201	01176	011700	011691	44 44,8	180,67	
269,9	497,8	407,8	61045	01188	011700	011698	45 50,4	180,70	
698,3	499,9	396,8	59857	01176	011700	011706	46 55,6	180,67	
307,0	500,1	386,2	58681	01162	011700	011710	48 01,0	180,67	
688,0	500,0	376,0	57519	01162	011700	011711	49 06,1	180,68	
317,0	500,0	366,0	56348	01171	011700	011709	50 11,1	180,63	
678,0	500,0	356,1	55157	01191	011710	011711	51 16,5	180,62	
326,8	500,1	346,6	53983	01174	011710	011704	52 21,4	180,61	
668,8	500,1	337,4	52815	01168	011710	011712	53 26,7	180,62	19,29°
385,9	500,1	328,5	51654	01161	011710	011717	54 32,0	180,65	
660,0	500,1	319,8	50488	01166	011710	011721	55 37,7	180,67	
344,2	500,1	311,4	49332	01156	011710	011715	56 43,1	180,72	
651,6	500,1	303,0	48144	01188	011710	011726	57 48,6	180,68	
352,7	500,1	294,9	46967	01177	011710	011725	58 54,2	180,70	
643,5	500,0	287,0	45788	01179	011710	011731	59 59,5	180,65	
360,3	500,0	279,5	44638	01150	011710	011789	11° 09 04,6	180,62	
636,0	500,0	271,9	43441	01187	011700	011782	03 14,8	180,61	
367,8	500,1	264,7	42275	01166	011700	011721	—	—	
628,9	500,1	257,6	41095	01180	011700	011731	05 25,3	180,64	
374,8	500,1	250,7	39915	01180	011700	011731	06 30,7	180,62	
622,1	500,0	244,1	38757	01158	011700	011712	±	180,65"	5
381,2	500,1	237,7	37608	01154	011700	011712	±	±	5
615,8	500,1	231,8	36418	01185	011700	011712	±	±	5
387,7					Mittel	011712	±	±	5

zwei Umkehrpunkten beobachteten Momente des Durchganges durch die Ruhelage 500 bis auf zehntel Sekunden angegeben,  $J$  enthält die Differenzen zweier um je zwölf ganze Schwingungen voneinander entfernter Momente dividiert durch 12; die einzelnen Werte weichen von ihrem Mittel im Höchsfalle um 0,4 Promille ab; die letzte Vertikalreihe schließlich enthält die von Zeit zu Zeit an dem Thermometer  $T$  abgelesene Temperatur. Diese steigt während des dargestellten Versuches durch die Strahlung des Beobachters und der Skalenbeleuchtung um  $\frac{1}{100}$  Grad, was einer Abnahme des Dekrementes um 1 Promille entsprechen würde.

Enthielt die Kugel Luft statt Wasser, so konnten die Dekremente nicht so genau gemessen werden, da sie nur etwa den zehnten Teil so groß waren. Die Schwingungsbeobachtungen wurden dabei stets über mehrere Stunden ausgedehnt, aber nur von Zeit zu Zeit 5–10 Schwingungen beobachtet. Auch bei über 160 Schwingungen während etwa dreier Stunden blieb die Schwingungsdauer bis auf weniger als 1 Promille konstant und das Dekrement bis auf weniger als 1 Proz.

Zur Berechnung des Reibungskoeffizienten ist die Kenntnis der absoluten Größe aller beobachteten Zahlen nötig; deshalb wurde das Dekrement der natürlichen Logarithmen auf eine ganze Schwingungsdauer bezogen (vgl. Theoret. Teil, p. 165) benutzt; es ergibt sich aus dem im Beispiel Tab. III berechneten durch Multiplikation mit 4,605. Ferner wurde der Gang des Chronometers nach der Sternwartenzeit korrigiert, die Gewichte, wo nötig, auf den leeren Raum usw. berechnet und das benutzte Thermometer unter den üblichen Vorsichtsmaßregeln mit einem von der Reichsanstalt geprüften Thermometer verglichen, dessen Nullpunkt besonders kontrolliert worden war.

Da die mit der Metallkugel erhaltenen Zahlen die zuverlässigeren sind, will ich explizite alle die Daten angeben, die zur Berechnung des Reibungskoeffizienten bei einem der Versuche der Metallkugel benutzt wurden.

Was zunächst die „Direktionskraft“  $f^2$  der Aufhängung betrifft, so ließ sich angenähert ihr Wert nach der Gleichung (15), p. 170, berechnen. Bei meinen Versuchen war:

der gegenseitige Abstand der	$e_1 = 0,15$ cm
Aufhängedrähte	$e_2 = 0,31$ "
ihre Länge	$l = 138$ "
ihr mittlerer Radius	$\varrho = 0,0106$ cm
ihr Torsionsmodul	$F = \frac{2}{3} E = 81,2 \cdot 10^{10}$ C.G.S.

(der letztere wurde aus Torsionsschwingungen eines unifilar aufgehängten Zylinders in üblicher Weise gemessen). Die Korrektion  $\delta$  war gegen  $l$  zu vernachlässigen. Aus diesen Werten ergibt sich für die Größenordnung

$$\text{von } g \cdot a: 0,080$$

und für diejenige

$$\text{von } b: 90.$$

Zur exakten Bestimmung von  $f^2$  andererseits sind, wie p. 171 auseinandergesetzt, mindestens drei Versuche mit leerer Kugel bei drei verschiedenen Zusatzträgheitsmomenten erforderlich. Es war:

das Gewicht der leeren Metallkugel	142,264 g
" " " mit Wasser von $19,2^\circ$ gefüllten Kugel	657,45 "
" " " des Tragekreuzes	338,880 "
" " " des Ringes I	73,264 "
" " " " II	166,087 "
" " " " III	245,320 "
" " " " IV	341,910 "

$$\text{Die Durchmesser der Ringe waren } \begin{cases} 2r_i = 24,50 \text{ cm} \\ 2r_a = 26,91 \text{ "} \end{cases}$$

Für die Werte der Schwingungsdauern erhielt ich im Mittel mehrerer Versuchsreihen beim Aufliegen:

des Ringes I	$T = 97,214''$
	$\pm 10$
" " II	$T = 115,363$
	$\pm 5$
" " III	$T = 127,441$
	$\pm 15$
der Ringe I u. III	$T = 136,860$
	$\pm 0$
" " II u. III	$T = 146,900$
	$\pm 6$

Das logarithmische Dekrement erwies sich zur Berechnung von  $f^2$  unnötig. Nach den Gleichungen (16, a, b, c), p. 171, wird:

1. aus den Versuchen mit den Ringen I, III und II + III

$$a g = 0,08753, \quad b = 80,978,$$

2. aus den Versuchen mit den Ringen I, II und I + III

$$ag = 0,08873, \quad b = 79,572.$$

Daraus folgt für die Größe von  $f^2$  beim Aufliegen der Ringe II + III

$$1. \quad f^2 = 204,22,$$

$$2. \quad f^2 = 204,52.$$

Außer dem Kugelradius, der sich aus dem Wassergewicht zu  $R = 4,9778$  cm ergab, bedürfen wir nun zur Berechnung von  $k$  noch der Kenntnis der logarithmischen Dekremente und der Schwingungsdauern für die mit Luft und die mit Wasser gefüllte Kugel. Diese Werte sind in der folgenden Tab. IV zusammengestellt.<sup>1)</sup> Der erste Teil bezieht sich auf Versuche mit der Glaskugel, der zweite auf die mit der Metallkugel. Es sind jedesmal die mit zwei verschiedenen Ringen erhaltenen Resultate angegeben, die also als voneinander unabhängig anzusehen sind. Aus den Versuchen mit der Glaskugel folgt

$$\eta_{17,5^\circ} = 0,01065 \text{ (C.G.S.)}$$

$$\pm 10$$

Aus den für die Metallkugel und den für Ring II + III angegebenen Werten ergibt sich

$$\Delta = 0,053896, \quad m = \frac{\sqrt{\Delta^2 + 4\pi^2}}{T^2} = 0,048094,$$

$$K^2) = \frac{4_0}{\pi} \frac{f_0^2}{m_0} = 12,490,$$

also nach den Gleichungen (14) p. 170

$$k' = 0,1255,$$

$$k'' = 0,0996,$$

$$k''' = 0,1027 \text{ usw.},$$

schließlich

$$k^{\text{VII}} = 0,1015$$

und

$$k^2 h = \eta_{10,2^\circ} = 0,01028 \text{ (C.G.S.)}$$

1) Das Dekrement  $\bar{\Delta}$  ist hier für die halbe Schwingungsdauer in Briggischen Logarithmen angegeben.

2) Das in Gleichung (12) mit dem Reibungskoeffizient der Luft multiplizierte Glied ist zu vernachlässigen und

$$\frac{\sin 4\varepsilon_0}{\sin 2\varepsilon_0} = 2 \cos 2\varepsilon_0 = -\frac{4_0}{\pi}$$

zu setzen.

Tabelle IV.

Versuche mit der Glaskugel bei 17,5° C.

	Schwingungs- dauer $T$	Logarithmisches Dekrement $\Delta$	Reibungskoeff. $\eta = k^2 h$ (C.G.S.)
Kugel leer			
Ring II {	116,232"	0,003637	
	116,223	0,003638	
Ring IV {	140,880"	0,002732	
	140,864	0,002714	
Kugel mit dest. Wasser gefüllt	96,940"	0,034328	0,01077
Ring II {	96,955	0,034311	
	96,960	0,034308	
Ring IV {	117,80"	0,023191	0,01052
	117,97	0,023241	

Versuche mit der Metallkugel bei 19,2° bzw. 19,1° C.

Kugel leer			
Ring II {	115,868"	0,003372	
	115,858	0,003360	
Ring II + III {	146,902"	0,0022944	
	146,900	0,0022931	
Kugel mit destilliertem Wasser gefüllt	130,646"	0,011727	0,01028
Ring II + III 19,2° C. {	130,680	0,011678	
	130,671	0,011705	
	130,657	0,011694	
	130,651	0,011726	
	130,653	0,011673	
	130,642	0,011725	
	130,637	0,011720	
Ring II 19,1° C. {	101,908"	0,019363	0,01039
	101,940	0,019377	
	101,950	0,019333	
	101,982	0,019329	
	101,976	0,019356	

Da eine Änderung des Dekrements oder der Schwingungs-  
dauer um 1 Promille den Reibungskoeffizienten um je 4 Pro-  
mille ändert und da das Dekrement bis auf  $\pm 2$  Promille, die  
Schwingungsdauer bis auf  $\pm 0,2$  Promille genau gemessen

werden konnte, ist der mögliche Fehler des Resultates  $\pm 9$  Promille.

Vergleichen wir die gewonnenen Werte mit den Ergebnissen, die nach anderen Methoden gefunden wurden (Tab. V), so müssen wir aus der Übereinstimmung den Schluß ziehen, daß alle bei der vorliegenden Methode gemachten Voraussetzungen innerhalb der Beobachtungsfehler durch die Versuche bestätigt werden, also in erster Linie, daß auch in diesem Falle die äußere Reibung zwischen Wasser und Glas oder Wasser und Metall unendlich groß ist.

Tabelle V.

Beobachter	Methode	Reibungskoeffizient des Wassers bei	
		17,5° C.	19,2° C.
Poiseuille <sup>1)</sup> (1846)	Strömung durch Kapillaren	0,01076	0,01081
Sprung <sup>2)</sup> (1876)	"	0,01065	0,01027
Slotte <sup>3)</sup> (1883)	"	0,01075	0,01030
Thorpe u. Rodger <sup>4)</sup> (1894)	"	0,01067	0,01025
W. König <sup>5)</sup> (1887)	Schwingung einer Vollkugel	0,01099	0,01054
K. Mützel <sup>6)</sup> (1891)	Schwingung eines Hohlzylinders	0,01082	0,01087
R. Ladenburg (1908)	Schwingung einer Hohlkugel	0,01065	0,01082

#### IV. Berechnung des Reibungskoeffizienten aus den Piotrowskischen Versuchen.

Was nun schließlich die von Piotrowski erhaltenen Resultate betrifft, so habe ich die von ihm für „ausgekochtes“

1) J. L. M. Poiseuille, Compt. rend. 15. p. 1167. 1842.

2) A. Sprung, Pogg. Ann. 159. p. 1. 1876.

3) K. F. Slotte, Wied. Ann. 14. p. 13. 1881.

4) J. E. Thorpe u. J. W. Rodger, Phil. Trans. 185. p. 397. 1894.

5) W. König, Wied. Ann. 32. p. 193. 1887.

6) K. Mützel, Wied. Ann. 43. p. 15. 1891.

Wasser von  $21,7^{\circ}$  C. angegebenen Werte ( $\Delta = 0,054668$ ,  $T = 22,9745^{\circ}$ ) in die oben abgeleitete Gleichung für  $k$  eingesetzt und finde als Wert des Reibungskoeffizienten (in C.G.S.)

$$(k^2 \cdot h)_{21,7^{\circ}} = 0,00992,$$

während der Mittelwert der nach Strömungsversuchen erhaltenen Zahlen für reines Wasser dieser Temperatur

$$0,00964$$

ist. Die Differenz von 3 Proz. liegt innerhalb der Piotrowski'schen Versuchsfehler, da die beobachteten Dekremente Schwingungen von 2 Proz. aufweisen. Von Interesse sind besonders noch die von Piotrowski für Äthyläther gefundenen Werte, da dieser bedeutend leichter beweglich als Wasser ist. Aus seinen für  $21,6^{\circ}$  C. angegebenen Zahlen finde ich nach der obigen Gleichung

$$k^2 h = 0,00218,$$

während Thorpe und Rodger nach der Strömungsmethode

$$0,00234 \text{ bei } 20^{\circ}$$

$$0,00212 \text{ bei } 30^{\circ}$$

erhalten. Es sind also auch für Äther bei den relativ kleinen Schwingungsdauern von  $24''$  die Geschwindigkeiten als so klein anzusehen, daß man die quadratischen Terme in den Differentialgleichungen vernachlässigen darf.

Helmholtz dagegen findet nach seiner Theorie aus den Piotrowskischen Versuchen für Äthyläther als Reibungskoeffizient bei  $21,6^{\circ}$

$$k^2 h = 0,00251$$

und für Wasser von  $24,5^{\circ}$

$$k = 0,1186 \text{ C.G.S.},$$

also den Reibungskoeffizienten

$$k^2 \cdot h = 0,01402,$$

während sich aus Strömungsversuchen für dieselbe Temperatur

$$0,00905$$

ergibt, d. h. eine Abweichung von mehr als 40 Proz.; und zugleich erhält Helmholtz für den Gleitungskoeffizient Wasser-Metall

$$\lambda = 0,235 \text{ cm.}$$

Der Grund für diese Differenzen scheint mir in einem Punkt der Theorie zu liegen, auf den Helmholtz selbst als

sehr ungünstig für die numerische Ausrechnung hingewiesen hat (l. c. p. 213): von wesentlichem Einfluß ist nämlich die Differenz

$$\frac{f^2}{M} - m^2$$

(die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe wie bei Helmholtz und wie in der oben abgeleiteten Theorie), „für deren Größe bereits Unterschiede in den Hundertteilen der Sekunde bei Bestimmung der Schwingungsdauern (d. h. bei 24" Schwingungsdauer Unterschiede von weniger als 1 Promille) maßgebend sind.“ Benutzt man nun zur Berechnung von  $\lambda$  statt des von Piotrowski für  $M$  angegebenen Wertes (21 250) nur einen um 1 Proz. kleineren, der innerhalb der von Piotrowski angegebenen Fehlergrenzen liegt, so erhält man für  $\lambda$  den Wert 0,009 cm statt wie Helmholtz 0,235 cm, also einen Wert, der noch kleiner ist als derjenige, den Helmholtz aus den Piotrowskischen Resultaten für Äther (0,012) ableitet, und bereits für Äther schließt Helmholtz aus den Piotrowskischen Versuchen auf ein vollständiges Haften an der Metallfläche. Aus diesen Werten von  $M$  und  $\lambda$  und aus den übrigen Piotrowskischen Zahlen erhält man schließlich mit Benutzung der Helmholtzschen Theorie einen Reibungskoeffizienten des Wassers, der nur noch um 8 Proz. von dem aus Strömungsversuchen abgeleiteten abweicht.

Mithin müssen wir, wie mir scheint, auch aus den Piotrowskischen Versuchen, auf eine unendlich große äußere Reibung zwischen Wasser und Metall schließen.

#### Zusammenfassung der Resultate.

1. Schwingungsdauer und Dekrement eines mit Wasser gefüllten Glasgefäßes, das drehende Schwingungen um eine vertikale Achse ausführte, änderten sich nicht bei Versilberung der inneren Oberfläche.

2. Die Helmholtzsche Theorie der Bewegung einer Flüssigkeit innerhalb einer schwingenden Kugel wurde auf den Fall unendlich großer äußerer Reibung angewendet.

3. Diese Theorie konnte durch Versuche in Glas- und Metallkugeln bestätigt werden: der auf diese Weise bestimmte



Reibungskoeffizient des Wassers stimmte mit dem nach anderen Methoden gefundenen bis auf wenige Promille überein.

4. Nach derselben Theorie ergab sich aus den Versuchen von Piotrowski für Wasser ein nur um 3 Proz. von dem Poiseuilleschen Werte abweichender Reibungskoeffizient, während Helmholtz nach seiner Theorie einen um 40 Proz. größeren Wert findet und einen merklich von Null verschiedenen Wert des Gleitkoeffizienten.

Zum Schluß sei es mir gestattet, den Herren Professoren Lummer und Pringsheim meinen aufrichtigen Dank zu sagen für die liebenswürdige Überlassung der zu den Versuchen nötigen Apparate und für das große Interesse, das sie der vorliegenden Arbeit jederzeit entgegengebracht haben.

Breslau, Physik. Institut der Univ., im August 1908.

(Eingegangen 10. August 1908.)

## 9. Ultramikroskopische Beobachtungen; von J. Reissig.

(Aus einer Erlanger Inaugural-Dissertation.)

### Einleitung.

Im Anschluß an die Arbeit von Siedentopf und Zsigmondy<sup>1)</sup> habe ich auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. E. Wiedemann in Erlangen eine Reihe von ultramikroskopischen Untersuchungen an Lösungen kolloidaler Substanzen ausgeführt, die mir von Hrn. Prof. Dr. Paal in Erlangen in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt wurden.

Die Paalschen Kolloide sind sogenannte „Adsorptionsverbindungen“ der kolloidalen Elemente mit *protalbinsaurem* oder *lysalbinsaurem Natrium*, die als „Schutzkolloide“ wirken. Die genannten Natriumsalze sind hochmolekulare Spaltungsprodukte des Eialbumins, welche bei der durch Natronlauge bewirkten alkalischen Hydrolyse des Albumins entstehen.<sup>2)</sup> Die Anwesenheit dieser Körper verleiht den Hydrosolen der Elemente eine bisher unbekannte Beständigkeit, die so weit geht, daß sich diese Adsorptionsverbindungen auch in *fester Form* gewinnen lassen und in diesem Zustande jahrelang ihren Hydrosolcharakter bewahren.

Werden die wässerigen, kolloidalen Lösungen der Adsorptionsverbindungen der Metallhydrosole in Kombination mit den Natriumsalzen der Protalbin- oder Lysalbinsäure angesäuert, so entstehen flockige Fällungen, die Adsorptionsverbindungen der *festen* Hydrosole mit *freier* Protalbin- oder Lysalbinsäure darstellen. Durch Zusatz von wenig Alkali

1) H. Siedentopf und R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. 10. p. 1. 1903.

2) C. Paal, Ber. d. D. chem. Ges. 35. p. 2195. 1902.

gehen sie wieder unverändert in kolloidale Lösung unter Rückbildung von protalbin- bzw. lysalbinsaurem Alkali.

Die meisten dieser durch Säuren erzeugten Fällungen der Metallhydrosole mit freier Protalbin- oder Lysalbinsäure bewahren auch in trockenem Zustande ihren Hydrosolcharakter monate- und jahrelang und lassen sich, in Wasser suspendiert, durch etwas Alkali wieder in die flüssigen Hydrosole verwandeln.

Derartige Präparate dienten auch zu meinen Versuchen. Um sie in die für die Untersuchung erforderlichen Lösungen von bestimmtem Gehalt an Metallhydrosol zu bringen, habe ich die abgewogenen trockenen Präparate in der nötigen Menge Wasser suspendiert und als lösendes Alkali Ammoniak von bestimmtem Gehalt verwendet. Da *Protalbinsäure* und *Lysalbinsäure* ebenfalls *Kolloide* sind, so liegen bei den Paalschen Adsorptionsverbindungen die Verhältnisse komplizierter wie bei den auf anorganischem oder elektrischem Wege dargestellten Metallkolloiden, deren Lösungen nur das betreffende Metallhydrosol enthalten.

Zunächst untersuchte ich den Einfluß der Intensität der Lichtquelle und der Konzentration der Lösungen auf die Zahl der im Ultramikroskop sichtbaren Teilchen und berechnete die Größe der ultramikroskopischen Teilchen; ferner beobachtete ich die Koagulationsgeschwindigkeit bei Einwirkung von Salzsäure auf kolloidale Goldlösungen.

Zu meinen Versuchen bediente ich mich eines von der Firma Leitz in Wetzlar gelieferten Apparates, der im Prinzip dem bekannten, von Siedentopf und Zsigmondy<sup>1)</sup> konstruierten Ultramikroskop entsprach. Das benutzte Mikroskop stammte von der Firma Zeiss. Als Lichtquelle diente eine elektrische Bogenlampe oder Sonnenlicht. Als Okularmikrometer benutzte ich zuerst eine Netzteilung mit 0,5 mm Seitenlänge eines Quadrates von der Firma Leitz, später das vortreffliche, von Siedentopf eigens für ultramikroskopische Beobachtungen konstruierte Okularmikrometer mit 0,25 mm Seitenlänge eines Quadrates.

Untersucht wurden die kolloidalen Lösungen von braunem

1) H. Siedentopf u. R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. 10. p. 1. 1903.

Tellur<sup>1)</sup>, Selen<sup>2)</sup>, Silber<sup>3)</sup>, rotem<sup>4)</sup> und blauem Gold Au<sub>2</sub> und Au<sub>3</sub><sup>5)</sup>. Die einzelnen Lösungen unterscheiden sich im Ultramikroskop ihrer Farbe nach deutlich voneinander. Selen zeigt meist blaue Teilchen, daneben einzelne rotgelbe; bei rotem Gold beobachtet man rote, gelbe und hauptsächlich grüne Teilchen, die Teilchen des blauen Goldes besitzen alle dieselbe Farbe, die ich mit Zsigmondy<sup>6)</sup> kupferrot nennen will, während man bei Silber die verschiedenartigst gefärbten Teilchen in glänzendem Farbenspiel antrifft. Die Lösungen von Selen, Silber und rotem Golde zeigen neben den Submikronen noch deutlich einen von Amikronen herrührenden Lichtkegel, in der Lösung des blauen Goldes dagegen war neben den Submikronen kein Lichtkegel zu bemerken.

Wegen aller Einzelheiten betreffs Herstellung der Lösungen usw. sei auf meine Dissertation (Erlangen 1908) verwiesen.

### I. Teil.

#### 1. Berechnung der linearen Dimensionen der ultramikroskopischen Teilchen in Paals kolloidalen Lösungen.

Siedentopf und Zsigmondy<sup>7)</sup> haben zur Berechnung der linearen Dimensionen ultramikroskopischer Teilchen unter der Annahme, daß die Teilchen Würfelgestalt besitzen und vollkommen mit kolloidaler Substanz erfüllt sind, zwei Methoden angegeben.

Bei der ersten Methode bestimmten sie die Zahl der Teilchen in der Volumeneinheit, indem sie ein bestimmtes erleuchtetes Flüssigkeitsvolumen abgrenzten, die Größe dieses Volumens bestimmten und die in demselben enthaltenen Teilchen

1) C. Paal, Ber. d. D. chem. Ges. 38. p. 534. 1905.

2) C. Paal, l. c. 38. p. 526. 1905.

3) C. Paal, l. c. 35. p. 2224. 1902.

4) C. Paal, l. c. 35. p. 2236. 1902.

5) Die Paalschen blauen flüssigen und festen Goldhydrosolen sind neu und sind leider bisher in der Literatur noch nicht beschrieben; dagegen ist dies bei den roten Goldhydrosolen der Fall.

6) R. Zsigmondy, Zur Erkenntnis der Kolloide.

7) H. Siedentopf u. R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. 10. p. 1. 1903.

zählten. Die Kantenlänge  $l$  der Würfel berechnet sich dann aus der Formel:

$$l = \sqrt[3]{\frac{A}{s} \cdot n},$$

wo  $A$  das Gewicht des kolloidal gelösten Metalles in der Volumeneinheit,  $n$  die Teilchenzahl in diesem Volumen und  $s$  das spezifische Gewicht des Metalles bedeutet.

Bei der zweiten Methode beobachteten sie den mittleren Abstand  $\nu$  der Teilchen, dann berechnet sich die Kantenlänge  $l$  der Würfel aus der Formel:

$$l = \nu \sqrt[3]{\frac{A}{s}}.$$

Zsigmondy<sup>1)</sup> fand für die Kantenlänge  $l$ , je nach der Herstellungsweise der Lösungen, Werte zwischen 6 und 130  $\mu$ . Lösungen der Paalschen Kolloide sind bisher noch nicht untersucht; Zsigmondy schreibt nur über Paals blaues kolloidales Gold, daß es „ziemlich große, kupferrote Teilchen“ enthält.

Da ich bei meinen Versuchen die in einem bestimmten Flüssigkeitsvolumen enthaltenen Teilchen auszählte, war ich auf die erste der beiden angeführten Methoden angewiesen. Dabei bestimmte ich zuerst durch Drehen des Spaltes um 90° die Beobachtungstiefe; dann zählte ich bei horizontal gestelltem Spalte die Teilchen in zehn Feldern des Okularnetzes und nahm die Summe dieser Zahlen. Hierauf führte ich die gleiche Beobachtung noch einigemal aus und bildete den Mittelwert.

Sämtliche Beobachtungen im ersten Teile wurden in den Monaten Juli und August bei Beleuchtung mit Sonnenlicht ausgeführt.

Die Tab. I enthalten in der ersten Spalte die Konzentration  $c$ , in der zweiten das Gewicht  $A$  der Teilchen im Kubikcentimeter in Grammen, in der dritten den nach der oben angegebenen Weise aus den Beobachtungen gebildeten Mittelwert  $N$  der Zahl der Teilchen, in der vierten die daraus berechnete Zahl  $n$  der Teilchen in 1 ccm, in der fünften die Kantenlänge  $l$ .

Da die Beobachtungstiefe für die einzelnen Lösungen zur deutlichen Beobachtung verschieden gewählt werden mußte,

1) R. Zsigmondy, Zur Erkenntnis der Kolloide, p. 104.

folglich in den einzelnen Fällen das beobachtete Volumen verschieden war, führe ich bei jeder Tabelle an, für welches Volumen die Zahl  $N$  gilt.

Das Gewicht  $A$  ergibt sich aus der Konzentration, wenn die Gesamtmasse des kolloidal gelösten Körpers in Form submikroskopischer Teilchen vorhanden ist; ist aber nur ein Teil des gelösten Körpers in Form von Submikronen, ein anderer Teil als Amikronen oder als homogene Lösung vorhanden, so erhält man aus der obigen Formel:

$$l = \sqrt[3]{\frac{A}{s} \cdot n}$$

wenigstens eine obere Grenze für die Teilchengröße, indem man für  $A$  das Gesamtgewicht des gelösten Körpers im Kubikzentimeter einsetzt.

### Tabellen I.

#### 1. Te.

Spezifisches Gewicht:  $s = 6$ ,  $N =$  Teilchenzahl in  $468000 \mu^3$ .

	$c$ in Proz.	$A$ in g	$N$	$n$	$l$ in $\mu\mu$
I.	$13 \cdot 10^{-4}$	$13 \cdot 10^{-6}$	23	$49 \cdot 10^6$	350
II.	$6,5 \cdot 10^{-4}$	$65 \cdot 10^{-7}$	12	$26 \cdot 10^6$	350
III.	$3,25 \cdot 10^{-4}$	$32,5 \cdot 10^{-7}$	6	$13 \cdot 10^6$	350
IV.	$1,62 \cdot 10^{-4}$	$16,2 \cdot 10^{-7}$	4	$8,5 \cdot 10^6$	320

#### 2. Se.

Spezifisches Gewicht:  $s = 4,5$   $\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \text{Teilchenzahl in } 58500 \mu^3, \\ N_2 = \text{„ „ } 234400 \mu^3. \end{array} \right.$

	$c$ in Proz.	$A$ in g	$N_1$	$n$	$l$ in $\mu\mu$
I.	$10^{-3}$	$10^{-5}$	78	$13,3 \cdot 10^6$	120
II.	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$	42	$7,2 \cdot 10^6$	116
III.	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	24	$4,1 \cdot 10^6$	110
			$N_2$	$n$	
IV.	$10^{-4}$	$10^{-6}$	36	$15,4 \cdot 10^7$	113
V.	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-7}$	26	$11,1 \cdot 10^7$	100
VI.	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$	16	$6,8 \cdot 10^7$	87
VII.	$10^{-5}$	$10^{-7}$	8	$3,4 \cdot 10^7$	87

3. Ag.

Spezifisches Gewicht:  $s = 10,5$ ,  $N =$  Teilchenzahl in  $368000 \mu^3$ .

	$c$ in Proz.	$A$ in g	$N$	$n$	$l$ in $\mu\mu$
I.	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	72	$19,5 \cdot 10^7$	81
II.	$4,4 \cdot 10^{-5}$	$4,4 \cdot 10^{-7}$	72	$19,5 \cdot 10^7$	60
III.	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	32	$87 \cdot 10^6$	62
IV.	$4,4 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-8}$	12	$82,5 \cdot 10^6$	51

4. Au<sub>2</sub> (blaues Gold).

Spezifisches Gewicht:  $s = 20$ ,  $N =$  Teilchenzahl in  $58500 \mu^3$ .

	$c$ in Proz.	$A$ in g	$N$	$n$	$l$ in $\mu\mu$
I.	$10^{-3}$	$10^{-5}$	53	$9,1 \cdot 10^8$	82
II.	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$	38	$6,5 \cdot 10^8$	78
III.	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	26	$4,4 \cdot 10^8$	66
IV.	$10^{-4}$	$10^{-6}$	17	$2,9 \cdot 10^8$	56
V.	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-7}$	11	$1,9 \cdot 10^8$	51
VI.	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$	7	$1,2 \cdot 10^8$	44
VII.	$10^{-5}$	$10^{-7}$	5	$8,5 \cdot 10^7$	39

5. Au<sub>2</sub> (rotes Gold).

Spezifisches Gewicht:  $s = 20$ ,  $N =$  Teilchenzahl in  $58500 \mu^3$ .

	$c$ in Proz.	$A$ in g	$N$	$n$	$l$ in $\mu\mu$
I.	$10^{-3}$	$10^{-5}$	31	$5,3 \cdot 10^8$	98
II.	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$	28	$39,4 \cdot 10^7$	86
III.	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	19	$32,5 \cdot 10^7$	73
IV.	$10^{-4}$	$10^{-6}$	8	$13,7 \cdot 10^7$	72

Nach den Tab. I würde sich ergeben, daß bei Tellur die gelösten Teilchen bedeutend größer sind, wie bei anderen Substanzen. Da ich jedoch schon bei Herstellung der Lösung bemerkte, daß sich das Tellur im Gegensatz zu den übrigen Substanzen nur schwer löste, so ist möglicherweise ein Teil des Tellur überhaupt nicht in Lösung gegangen. Dies ist um so eher anzunehmen, als nach Angabe von Hrn. Prof. Paal

die Präparate schon vor längerer Zeit hergestellt war und die Löslichkeit derselben mit der Zeit abnehmen kann.

## 2. Einfluß der Konzentration.

Aus den Tab. I ergibt sich, daß die Teilchenzahl nicht der Konzentration der kolloidal gelösten Substanz proportional ist, sondern daß dieselbe in der konzentrierten Lösung relativ kleiner ist. Die gleiche Beobachtung machte schon Zsigmondy<sup>1)</sup>, als er Silberhydrosol, das nach Bredig<sup>2)</sup> durch elektrische Zerstäubung hergestellt war, bei verschiedenen Konzentrationen untersuchte. Nach Zsigmondy „tritt dieser Fall stets dann ein, wenn die Flüssigkeiten Teilchen verschiedener Größe nebeneinander enthalten. Der Grund davon ist hauptsächlich darin gelegen, daß die kleineren Teilchen erst bei stärkerer Verdünnung deutlich wahrnehmbar werden, wenn durch Verdünnung die größeren zum Teil aus dem Gesichtsfeld entfernt worden sind,“ eine Ansicht, welcher ich mich auch anschließe (vgl. die Dissertation).

Unter dieser Annahme muß man aber in den Tab. I für die linearen Dimensionen der Teilchen in den Lösungen aller Konzentrationen die bei der schwächsten Konzentration gefundenen Werte annehmen. In den Lösungen des Selen, Silbers und roten Goldes handelt es sich hierbei nur um eine obere Grenze, da in diesen Lösungen ein Lichtkegel auf das Vorhandensein von Amikronen hinweist. Anders verhält es sich mit den Lösungen des blauen Goldes; hier konnte wie erwähnt, kein Lichtkegel nachgewiesen werden, also befinden sich in dieser Lösung keine oder wenigstens nicht viele Amikronen. Dann stimmen aber die bei schwachen Konzentrationen gefundenen Werte für die Größe der Teilchen mit den wirklichen Dimensionen derselben überein, wenn die Teilchen in der angenommenen Form in der Lösung vorhanden sind. Man erhält daher unter der Annahme der Würfelgestalt für die Kantenlänge der Teilchen in blauer Goldlösung  $40\mu\mu$ .

1) R. Zsigmondy, Zur Erkenntnis der Kolloide, p. 96.

2) G. Bredig, Zeitschrift für angewandte Chemie, 41. 1898.



### 3. Einfluß der Helligkeit.

Daß die Intensität der zur Beleuchtung benutzten Lichtquelle die ultramikroskopische Beobachtung beeinflußt, läßt sich schon aus der folgenden Bemerkung von Zsigmondy<sup>1)</sup> schließen: „Goldteilchen, für welche eine Lineardimension von  $15\mu$  gefunden wurde, liegen an der Grenze der Sichtbarkeit bei der Beleuchtung mit elektrischem Bogenlicht, kleinere Teilchen kann man nur bei Anwendung von Sonnenlicht wahrnehmen, die kleinsten noch sichtbar zu machenden bis gegen  $5\mu$  hinab aber bemerkt man nur bei hellstem Sonnenlicht an ganz klaren Tagen und bei vollkommener Dunkeladaptation“.

Messende Versuche über die Abhängigkeit der Zahl der beobachtbaren Teilchen von der Intensität der benutzten Lichtquelle sind mir nicht bekannt. Versuche in dieser Richtung mußten daher den ultramikroskopischen Messungen vorausgehen. Dazu wurde eine bestimmte Lösung bei Beleuchtung mit Licht von verschieden starker Intensität beobachtet und die Abhängigkeit der Zahl der Teilchen von der Intensität der benutzten Lichtquelle festgestellt.

Zu brauchbaren Resultaten kam ich, als ich Sonnenlicht allein verwandte, dessen Intensität ich durch Rauchgläser abschwächte. Zur Verwendung kamen vier Rauchgläser mit den Extinktionen: 0,68; 0,66; 0,485; 0,13. Durch Kombination dieser Rauchgläser zu zweien und mehreren konnte man noch andere Werte der Extinktion des Lichtes erhalten.

Tab. II enthält die bei verschiedener Intensität des Lichtes in der früheren Weise beobachteten Teilchenzahlen. In der Tabelle enthält die erste Spalte den Namen der Lösung, die zweite die Konzentration  $c$  der Lösung, die dritte das Volumen  $V$ , auf das sich die angeführten Teilchenzahlen beziehen.

In den Kurven, Fig. 1, sind als Abszissen die Intensitäten des Lichtes, als Ordinaten die beobachteten Teilchenzahlen aufgetragen. Bei den Beobachtungen an den oben erwähnten fünf Substanzen ergibt sich das Resultat:

*Die beobachtbare Zahl der Teilchen ist innerhalb der benutzten Intensitätsgrenzen proportional der Intensität des Lichtes.*

1) R. Zsigmondy, Zur Erkenntnis der Kolloide, p. 96.

Tabelle II.

	c	V	Teilchenzahl bei Lichtintensität									
			1	0,68	0,66	0,485	0,45	0,33	0,22	0,13	0,09	
Te	$1,3 \cdot 10^{-3}$	46 800	23	15	14	11	10,5	7		4	3,5	
Se I	$5 \cdot 10^{-4}$	5 850	40	28	27	20	19	13	8	8		
II	$2,5 \cdot 10^{-4}$	5 850	24	17,5	16,5	12	11,5	8				
III	$10^{-4}$	23 400	36	26	25	17	15	12	8	4		
IV	$5 \cdot 10^{-5}$	23 400	26	18	18	13	12	10	6	4,5		
V	$2 \cdot 10^{-5}$	23 400	16	12	10,5	8,5		6	4			
Ag	$2,2 \cdot 10^{-5}$	36 800	32	21,5	21,5	16	14	8				
Au <sub>0</sub>	$10^{-4}$	23 400	23	18	16	11,5	11	8	6			
Au, I	$5 \cdot 10^{-4}$	23 400	36	24,5	23,5	17	16	11	8	5		
II	$10^{-4}$	23 400	15	12	10,5	8	7,5					

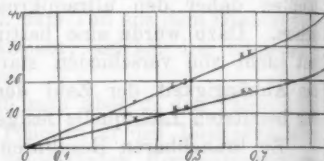
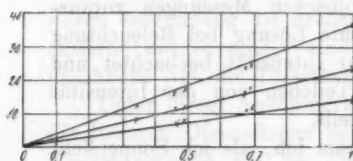
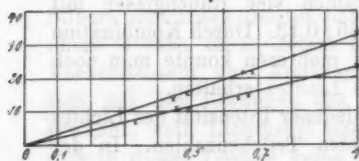
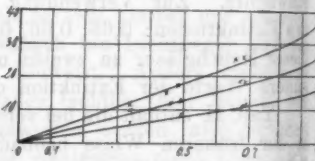
 $Am, Au, I$  u. II. $Se$  I u. II. $Se$  u. Ag. $Se$  III - V.

Fig. 1.

Um zu prüfen, ob die Geraden in den Kurven, Fig. 1, durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems gehen, untersuchte ich alle Lösungen bei gleichzeitiger Vorschaltung aller vier Rauchgläser (Extinktion = 0,03); stets wurden im Gesichtsfeld noch einige Teilchen beobachtet, bei schwachen Konzentrationen allerdings öfters erst bei längerer Beobachtung.

Aus den Beobachtungen dieses Abschnittes ergibt sich der Schluß, daß in den Lösungen der Paalschen Kolloide Teilchen ganz verschiedener Größe vorhanden sein müssen.

Der Zusammenhang des oben angegebenen Satzes mit dem von Lummer<sup>1)</sup> mitgeteilten, daß die Helligkeit der ultramikroskopischen Teilchen mit der sechsten Potenz des Durchmessers der Teilchen abnimmt, muß noch besonders untersucht werden.

Wegen der Berechnung der Größe der Teilchen unter Berücksichtigung der bei verschiedener Lichtintensität beobachteten Zahl der Teilchen sei wieder auf die Dissertation verwiesen.

#### 4. Berechnung der Größe der Teilchen aus dem Auflösungsvermögen des Mikroskops.

Der kleinste Abstand  $e_0$ , der von einem Mikroskop noch aufgelöst werden kann, ergibt sich aus der bekannten Formel:

$$e_0 = \frac{\lambda}{n \cdot \sin a} = \frac{\lambda}{a},$$

wenn  $2a$  der Öffnungswinkel des Mikroskops,  $n \cdot \sin a = a$  also dessen numerische Apertur ist.

Die numerische Apertur des von mir benutzten Objektivs beträgt 0,40; für den kleinsten, noch auflösbaren Abstand erhält man also bei dem von mir benutzten Objektiv:  $e_0 = \lambda/0,40$ .

Zur Berechnung der Größe der ultramikroskopischen Teilchen läßt sich diese Formel in folgender Weise verwenden:

Siedentopf und Zsigmondy<sup>2)</sup> haben bereits darauf aufmerksam gemacht, daß bei ultramikroskopischer Untersuchung einer kolloidalen Lösung ein intensiver homogener Lichtkegel erscheint in der Farbe der Lösung, solange die Teilchenabstände kleiner sind als das Auflösungsvermögen des Mikroskops, daß dagegen bei größerem Teilchenabstand die Teilchen als getrennte Punkte erscheinen und zwar in einer Farbe, die der Farbe der Lösung annähernd komplementär ist. Diese Angaben habe ich bei Untersuchung von roter Goldlösung und von Silberlösung in stärkerer Konzentration bestätigt gefunden; nur bemerkte ich neben dem homogenen Lichtkegel auch noch einzelne Beugungsscheibchen, die aber in diesem Falle, ebenso wie der Lichtkegel, die Farbe der Lösung besaßen.

1) Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik 10. Aufl. p. 418.

2) H. Siedentopf u. R. Zsigmondy, Ann. d. Phys. 10. p. 1. 1908.

Im Falle der roten Goldlösung waren bei Au, I (Konzentration = 0,0169 Proz.) ein roter Lichtkegel und rote Beugungsscheibchen zu sehen; bei Au, II (Konzentration = 0,00845 Proz.) war der Lichtkegel grün, die Teilchen gleichfalls hauptsächlich grün. Zwischen beiden Konzentrationen muß also der Teilchenabstand größer geworden sein als das Auflösungsvermögen des Mikroskops, d. h. größer als

$$e_0 = \frac{\lambda}{0,40} = \frac{0,00055}{0,40} = 0,0014 \text{ mm.}$$

Setzt man in die von Zsigmondy zur Berechnung der Teilchengröße aus dem Teilchenabstand  $\nu$  benutzte Formel:

$$l = \nu \cdot \sqrt[3]{\frac{A}{s}}$$

für  $\nu$  den Wert von  $e_0 = 0,0014 \text{ mm}$  ein, so erhält man für Au, I eine obere Grenze  $l_0 = 28 \mu\mu$ , für Au, II eine untere Grenze  $l_u = 23 \mu\mu$ ; daraus ergibt sich der Mittelwert:  $l_m = 25 \mu\mu$ .

Bei Silberlösung Ag I (Konzentration = 0,0022 Proz.) bemerkte ich einen grünen Lichtkegel und Beugungsscheibchen in grüner Farbe; bei Ag II (Konzentration = 0,00044 Proz.) hatten die Teilchen die verschiedensten Farben: grün, gelb, rot, blau, während der Lichtkegel blau war. Demnach ergibt sich in analoger Weise wie oben:  $l_0 = 18 \mu\mu$ ,  $l_u = 10 \mu\mu$ ;  $l = 14 \mu\mu$ .

Die nach dieser Methode berechneten Größen der Teilchen in Lösungen von rotem Gold und Silber sind kleiner wie jene, die aus der Beobachtung der Zahl der Teilchen in einem bestimmten Volumen sich ergaben; es muß auch so sein, da es sich bei der hier gegebenen Methode um die Berechnung des Mittelwertes der wirklichen Größen handelt, während man nach der früher benutzten Methode nur eine obere Grenze erhält. Vor allem ist zu beachten, daß hier auch die amikroskopischen Teilchen berücksichtigt werden, auf deren zahlreiches Vorhandensein in beiden Lösungen ein starker Lichtkegel hindeutet.

Schließlich versuchte ich noch, nach der letzten Methode die Größe der Teilchen in der blauen Goldlösung zu berechnen. Aus dem Fehlen eines Lichtkegels bei früheren Beobachtungen hatte ich geschlossen, daß in dieser Lösung keine Amikronen

vorhanden sind. Es mußten also die hier gefundenen Werte nahe übereinstimmen mit den aus der Zahl der Teilchen berechneten. Ein homogener Lichtkegel wie bei den beiden oben erwähnten Lösungen war hier nicht zu bemerken, dagegen besaßen bei Lösung  $Au_6 I$  (Konzentration = 0,06 Proz. die Teilchen dunkelviolette Farbe, bei  $Au_6 II$  (Konzentration = 0,03 Proz.) waren sie kupferrot, wie stets in verdünnten Lösungen des blauen Goldes; die erste Farbe ist die Farbe der Lösung. Nehme ich daher an, daß zwischen den beiden Lösungen der Teilchenabstand größer als das Auflösungsvermögen des Mikroskops geworden ist, so ergibt sich in analoger Weise wie oben:  $l_1 = 44 \mu\mu$ ,  $l_2 = 35 \mu\mu$ ,  $l_3 = 40 \mu\mu$ ;  $l = 40 \mu\mu$  habe ich aber in Tab. I für die Teilchen der blauen Goldlösung aus der Zahl der Teilchen in stark verdünnten Lösungen berechnet. Die beiden Resultate stützen sich also gegenseitig.

## II. Teil.

Im zweiten Teile habe ich das Verhalten der kolloidalen Goldlösungen auf Zusatz von Salzsäure mit Hilfe des Ultramikroskops verfolgt.

Zsigmondy<sup>1)</sup> hatte schon versucht, die Koagulation des kolloidalen Goldes durch Elektrolytzusätze zu verfolgen; doch trat sie „meist so schnell ein, daß man das Resultat des Zusammentretens der kleinen Teilchen, nicht aber diesen Vorgang selbst beobachten kann.“

Biltz<sup>2)</sup> hat mit dem Ultramikroskop das Abscheiden des Schwefels aus der Thioschwefelsäure und des Selen aus der selenigen Säure beobachtet.

Meine Versuche haben sich auf die Einwirkung der Salzsäure erstreckt, die sich dazu besonders geeignet erwies. Einmal war dieselbe fast optisch leer, dann zeigte eine rote kolloidale Goldlösung, die neben einem starken Lichtkegel nur wenige lichtschwache Teilchen zeigte, nach dem Zusatz der Säure kupferrote Teilchen, die infolge ihrer Lichtstärke leicht zu beobachten waren. Von den Kolloiden habe ich Goldlösung untersucht, da hier eine chemische Wirkung ausgeschlossen war.

1) R. Zsigmondy, Zur Erkenntnis der Kolloide, p. 115.

2) W. Biltz, Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Kl. p. 300. 1904.

In meiner Dissertation habe ich die Resultate der Arbeiten von Hardy<sup>1)</sup>, Bredig<sup>2)</sup> und Billitzer<sup>3)</sup> über das Ausfällen kolloidaler Lösungen auf Elektrolytzusätze hin kurz zusammengestellt.

#### Versuche mit roter Goldlösung.

Wie eingangs erwähnt, werden die Paalschen Adsorptionsverbindungen kolloidaler Elemente mit protalbin- und lysalbinsaurem Natrium durch Säuren gefällt, wobei die Metallhydrosol mit adsorbierter, freier Protalbin- oder Lysalbinsäure ausfallen. Diese Fällungen werden, wie ebenfalls schon angegeben, durch verdünnte, wässrige Alkalien wieder in die ursprünglichen, flüssigen Hydrosol übergeführt. Die beiden Eiweißspaltungsprodukte — Protalbin- und Lysalbinsäure — verhalten sich gegen Alkalien und Säuren nach den Untersuchungen Paals (l. c.) amphoter, was durch ihren Amidosäurecharakter bedingt ist; doch überwiegt bei ihnen die Azidität gegenüber der Basizität, immerhin zeigt sich aber, daß in verdünnten, wässrigen Lösungen die Alkalisalze der beiden Eiweißspaltungsprodukte durch Mineralsäuren im Überschuß in die Salze der Protalbinsäure oder Lysalbinsäure mit den betreffenden Mineralsäuren übergeführt werden, die in viel Wasser löslich sind. Mit der Bildung solcher wasserlöslicher Säuresalze hängt jedenfalls die nachstehend beschriebene Beobachtung zusammen, daß durch Säuren (Salzsäure) die Ausflockung der Paalschen Kolloide nur äußerst langsam vor sich geht, im Gegensatz zu den auf anorganischem oder elektrischem Wege dargestellten Hydrosolen, die durch Mineralsäuren rasch ausgeflockt werden und dabei in irreversible Gele übergehen.

Die ultramikroskopischen Beobachtungen über die Einwirkung von Salzsäure auf kolloidale Goldlösung wurden mit Bogenlicht bei einer Beleuchtungstiefe von  $54\mu$  ausgeführt. Die Salzsäure — und zwar Normalsalzsäure — wurde tropfenweise mit der Pipette in 25 ccm Lösung, die sich in einem

1) W. B. Hardy, Zeitschr. f. phys. Chemie 38. p. 385. 1900.

2) G. Bredig, Anorgan. Fermente.

3) J. Billitzer, Zeitschr. f. phys. Chem. 45. p. 307. 1903; Ann. d. Phys. 11. p. 102; 1903; Wiener Ber., Math.-naturw. Kl. Abt. IIa, 111. p. 1393. 1902; l. c. 112. p. 1093. 1903; l. c. 113. p. 1159. 1904.

Reagensglas befanden, gebracht; dann wurde die Lösung sofort in das vorher sorgfältig mit destilliertem Wasser ausgespülte Beobachtungsgefäß des Ultramikroskops gegossen und beobachtet.

Zur Anwendung kamen rote und blaue Goldlösung, die sich wesentlich voneinander unterscheiden, da bei der roten Goldlösung neben den Submikronen noch zahlreiche Amikronen vorhanden waren. Der Reaktionsverlauf gestaltet sich dementsprechend bei beiden verschieden; er ist wohl bei der blauen Lösung einfacher, dagegen boten gewisse Erscheinungen bei der roten Lösung sich deutlicher dar, weshalb letztere zuerst behandelt wird.

#### Versuche mit Au, I.

Gehalt der Lösung an Gold  $10^{-3}$  Proz., an Ammoniak 9,6.  $10^{-3}$  Proz. Die Lösung zeigte vor Zusatz der Säure neben einem grünlich-weißen Lichtkegel 15 Teilchen in 10 Quadraten des Netzes. Tab. IV enthält zwei Versuche mit dieser Lösung,  $t$  bedeutet die Zeit, gerechnet vom Zusatz der Säure an,  $n_1$  die Zahl der Teilchen in 10 Quadraten des Okularnetzes nach Zusatz von 5 Tropfen,  $n_2$  dieselbe Zahl nach Zusatz von 25 Tropfen n. HCl.

Tabelle IV.<sup>1)</sup>

$t$	10 <sup>m</sup>	18 <sup>h</sup>	90 <sup>h</sup>	4 <sup>3/4</sup> <sup>d</sup>	6 <sup>d</sup>	8 <sup>d</sup>	9 <sup>d</sup>	13 <sup>d</sup>	15 <sup>d</sup>	18 <sup>d</sup>	19 <sup>d</sup>	20 <sup>d</sup>	21 <sup>d</sup>	33 <sup>d</sup>	54 <sup>d</sup>
$n_1$	15	50	50	50	39	32	22	21	15						
$n_2$	40	40	49	40						31	29	26	25	14	13

In Tab. IV sind die Resultate angeführt, solange die Zählung mit dem Okularnetz ausgeführt werden konnte; später konnten nur noch einzelne Teilchen im Gesichtsfeld beobachtet werden, deren Zahl weiter abnahm. Diese Versuche zeigen, daß die Zahl der im Ultramikroskop sichtbaren Teilchen der roten Goldlösung erst zu einem Maximum anwächst, dann bis zum Verschwinden der Teilchen abnimmt, ferner daß ein kleinerer Säurezusatz eine stärkere ausfällende Wirkung ausüben kann wie ein größerer.

1) h bedeutet Stunden, d Tage.



## Au, II.

Gehalt an Gold  $2 \cdot 10^{-4}$  Proz., an Ammoniak  $1,9 \cdot 10^{-3}$  Proz. Vor Zusatz der Säure sieht man im Gesichtsfeld etwa 25 Teilchen und einen schwachen Lichtkegel. Nach Zusatz der Säure treten im Gesichtsfeld zahlreiche kupferrote Teilchen auf, mit deren Auftreten der Lichtkegel verschwindet; es tritt also ein Zusammenflocken der amikroskopischen Teilchen zu submikroskopischen ein. Die Beobachtungen mit dieser Lösung führe ich in Tab. V an.

Tabelle V.

Zusatz von HCl in Tropfen	Teilchenzahl nach														
	2 <sup>m</sup>	5 <sup>m</sup>	7 <sup>m</sup>	10 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	20 <sup>m</sup>	25 <sup>m</sup>	30 <sup>m</sup>	35 <sup>m</sup>	45 <sup>m</sup>	1 <sup>h</sup>	2 <sup>h</sup>	6 <sup>h</sup>	20 <sup>h</sup>	1 <sup>d</sup>
1	<u>50</u>		39	36	31	27	24	22			16	15	12		
2	<u>38</u>	<u>45</u>		39	34	30	28	27		28	19	17			
3		<u>17</u>		23			25		25	<u>28</u>	28				25
5		18						22			24	26	<u>28</u>		26
10					29		32		43	<u>49</u>	45	34		26	25
15	<u>60</u>	<u>40</u>		36	29	26		25		<u>21</u>	11			15	
18	<u>44</u>	<u>53</u>		53	40	32	26	26		26					

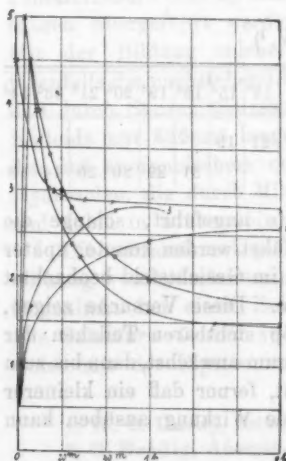


Fig. 2.

In der Tab. V habe ich in jeder Reihe die Zahl unterstrichen, die das Maximum der Teilchenzahl angibt. Dadurch ergibt sich, daß das Zusammenflocken der Teilchen am schnellsten erfolgt auf Zusatz von 1 und 15 Tropfen Salzsäure, am langsamsten auf Zusatz von 5 Tropfen. Da aber das Zusammenflocken der amikroskopischen Teilchen zu submikroskopischen das Ausfallen des Goldes bewirkt, folgt aus dem obigen, daß die Lösung auf Zusatz von 5 Tropfen Salzsäure ein Maximum der Stabilität, auf Zusatz von 1 Tropfen



sowohl wie von 15 Tropfen dagegen ein Minimum der Stabilität besitzt. Näheres über die Bedingungen des Ausfällens kolloidaler Lösungen vgl. weiter unten.

Der Vorgang des Zusammenflockens selbst war nicht zu beobachten; ich konnte stets nur das Auftreten kupferroter Teilchen konstatieren, ohne den Vorgang, der dazu führt, wahrzunehmen.

Die Kurven 1—4, Fig. 2, geben die Resultate der ersten vier Reihen der Tab. V wieder. In ihnen ist die Zeit, vom Zusatz der Säure an gerechnet, die Abszisse, die Zahl der Teilchen in einem Quadrat als Ordinate aufgetragen. Man erhält die bekannte Kurve für die Reaktionsgeschwindigkeit, die auf Zusatz von 1 und 2 Tropfen HCl in der auf das plötzliche Auftreten der Teilchen folgenden Abnahme ihrer Zahl, bei Zusatz von 3 und 5 Tropfen HCl in der Zunahme der Zahl der kupferroten Teilchen besteht.

#### Versuche mit blauem Golde.

Bei früheren Beobachtungen der blauen Goldlösung war kein Lichtkegel bemerkt worden. Da demnach in dieser Lösung keine Amikronen sich befinden, so mußte bei jedem Säurezusatz die Teilchenzahl von vornherein abnehmen, die Vorgänge der Ausfällung sich einfacher gestalten.

Die Beobachtungen mit blauem Gold stellte ich an der Lösung  $\text{Au}_2\text{I}$  an, deren Gehalt an Gold  $4 \cdot 10^{-4}$  Proz., an Ammoniak  $3,8 \cdot 10^{-3}$  Proz. betrug. Vor Zusatz der Säure fand ich als Zahl der kupferroten Teilchen in zehn Quadraten des Okularnetzes 45. In Tab. VI enthält die erste Spalte die zu 25 ccm Lösung zugesetzten Tropfen n. HCl, die weiteren Spalten die Anzahl der Teilchen in zehn Quadraten nach den angegebenen Zeiten. Die Abnahme der Teilchen erfolgte, übereinstimmend mit dem für rotes Gold gefundenen Gang der Reaktion, erst schnell, dann langsam. In Fig. 2 stellt Kurve 5 den Verlauf der Reaktion auf Zusatz von 8 Tropfen n. HCl dar.

Die Werte der Tab. VI sind in der Kurve, Fig. 3, dargestellt, wo als Abszissen der Zusatz an Säure in Tropfen, als Ordinaten die Zeit aufgetragen ist, die vergeht, bis die Zahl der Teilchen auf 20 in zehn Quadraten des Netzes sich verringert hat. Falls ich diese Zeit nicht direkt beobachtet hatte, interpolierte ich sie aus der ihr vorhergehenden und

Tabelle VI.

Teilchenzahl nach

	3 <sup>m</sup>	5 <sup>m</sup>	10 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	20 <sup>m</sup>	25 <sup>m</sup>	30 <sup>m</sup>	45 <sup>m</sup>	1 <sup>h</sup>	1 1/2 <sup>h</sup>	2 <sup>h</sup>	3 <sup>h</sup>	6 <sup>h</sup>	7 <sup>h</sup>	1 <sup>d</sup>	1 1/4 <sup>d</sup>	2 <sup>d</sup>	3 <sup>d</sup>	5 <sup>d</sup>	6 <sup>d</sup>	7 <sup>d</sup>	8 <sup>d</sup>	11 <sup>d</sup>	12 <sup>d</sup>	18 <sup>d</sup>	15 <sup>d</sup>	16 <sup>d</sup>	19 <sup>d</sup>	21 <sup>d</sup>	29 <sup>d</sup>	
1		39	35	34	33	32	32	31	30		29		28		—	19															
2	40	37	35	34	34		33	32	31	30			29		27		28			24		20	15			—					
3	37		37	36	35	34		34	33	32	31		29							23						—				17	
5					39		32		30		28																			15	
8	38	35	32	30	29	29	29	28								25			22											17	
10	36	35	32	30	29	29		29	29					29			26	24				21	—						17		
12		38	31	30	29	28	27	27	26	25	24			24	23					15				13		11					
15		35	29	28	27	27		27			26	26	20	20			13														
18		32	31	30	30			27	25	24	24	23			23	19				15		16		14		14					
25																				18	17		16					14		14	

folgenden. Die betreffenden Stellen in der Tabelle sind unterstrichen. Aus Tab. VI sowohl, wie aus der Kurve, Fig. 3, ersieht man, daß bei Zusatz von 5 Tropfen HCl die Stabilität

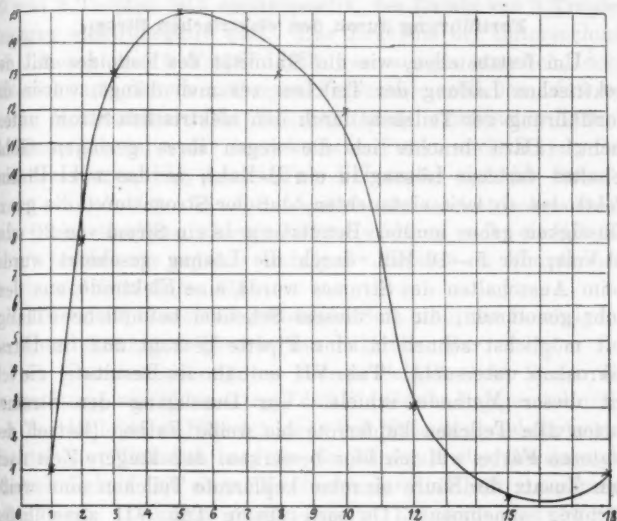


Fig. 3.

der Lösung ein Maximum besitzt, während bei Zusatz von 1 Tropfen und ebenso von 15 Tropfen die Stabilität ein Minimum hat.

Die Stabilität der Lösungen bei HCl-Zusatz dadurch zu untersuchen, daß man die Zeit bestimmt, nach der alle Teilchen ausgefallen sind, läßt sich ultramikroskopisch nicht durchführen.

Die in der Tab. VI noch angeführte Lösung mit Zusatz von 25 Tropfen HCl ist in der Kurve, Fig. 4, nicht eingezeichnet. Es war bei dieser Lösung, wie stets bei Lösungen mit größerem HCl-Zusatz, das Verhältnis der Beobachtung nicht mehr so günstig, da hier neben kupferroten Teilchen auch solche in anderen Farben sichtbar waren, die mit der Zeit wieder verschwanden. In Tab. VI habe ich daher erst über die Beobachtungen Angaben gemacht, bei denen in der Hauptsache nur noch kupferrote Teilchen zu sehen waren. Daraus zeigt

sich aber deutlich, daß die Stabilität der Lösung bei Zusatz von 25 Tropfen HCl größer ist wie bei Zusatz von 18 oder erst recht von 15 Tropfen HCl.

#### Fortführung durch den elektrischen Strom.

Um festzustellen, wie die Stabilität des Kolloides mit der elektrischen Ladung der Teilchen zusammenhängt, wurde die Fortführung der Teilchen durch den elektrischen Strom untersucht. Dazu brachte ich die wegen ihres geringen Goldgehaltes farblose Lösung in ein U-Rohr, in das zwei Platinelektroden so weit eintauchten, daß der Strom durch die ganze Flüssigkeit gehen mußte. Benutzt wurde ein Strom von 20 oder 40 Volt, der 5—10 Min. durch die Lösung geschickt wurde. Beim Ausschalten des Stromes wurde eine Elektrode aus dem Rohr genommen, die in diesem Schenkel befindliche Flüssigkeit möglichst schnell in eine Pipette gesaugt und im Ultramikroskop untersucht. Tab. VII enthält die Resultate, die ich mit dieser Methode erhielt. Vor Durchgang des Stromes hatten alle Teilchen kupferrote bis weiße Farbe. (Betreff der letzteren Farbe will ich hier bemerken, daß längere Zeit nach dem Zusatz der Säure einzelne kupferrote Teilchen eine weiße Färbung annehmen). Da sich die in Tab. VII angeführten blauen und grünen Teilchen durch ihre Farbe von den Goldteilchen unterscheiden, nahm ich an, daß es sich hier um die Schutzkolloide handelt, eine Vermutung, die ich später experimentell bestätigen konnte (vgl. die Dissertation).

Tabelle VII.

<i>V</i>	<i>m</i>	<i>z</i>	<i>d</i>	<i>n</i>	<i>n<sub>k</sub></i>	<i>n<sub>a</sub></i>
20	5	10	18	17	18 kupferrot oder weiß	15 blau oder grün
40	10	8	21	17	16 „ „ „	17 „ „ „
40	10	5	29	15	12 blau oder grün	18 „ „ „
40	10	3	21	17	12 „ „ „	20 kupferrot oder weiß

In Tab. VII bedeutet in den ersten beiden Spalten *V* die Spannung des Stromes in Volt, *m* die Dauer des Stromdurchganges in Minuten; in der dritten und vierten Spalte gibt *z* den Zusatz an HCl in Tropfen, *d* die seit dem Zusatz verflossene Zeit in Tagen; *n* ist die vor Durchgang des Stromes,

$n_2$  bzw.  $n_a$  die nach Durchgang des Stromes an der Kathode bzw. Anode beobachtete Teilchenzahl.

Die Tab. VII zeigt, daß die Goldteilchen bei Zusatz von 10 und 8 Tropfen HCl elektropositiv, bei Zusatz von 3 Tropfen dagegen elektronegativ sind. Das Ergebnis der Untersuchung der Lösung mit 5 Tropfen HCl war weniger deutlich, doch läßt sich aus den drei übrigen Versuchen schließen, daß bei dieser Konzentration die Teilchen keine elektrische Ladung besitzen, hier also der isoelektrische Punkt nach Hardy ist. Aus der Kurve, Fig. 3, und Tab. VII ergibt sich der Satz:

*Kolloidale Lösungen besitzen im isoelektrischen Punkt ein Maximum der Stabilität, während sich sowohl für positive wie negative Ladung der Teilchen ein Minimum der Stabilität finden läßt.*

Dieser experimentell gefundene Satz stellt die Bestätigung der oben erwähnten Theorie von Billitzer dar.

In Übereinstimmung mit diesem Schluß steht ferner die Beobachtung von Flemming, daß die Gerinnungsgeschwindigkeit der kolloidalen Kieselsäure in der Nähe des isoelektrischen Punktes ein Minimum hat, da ein Minimum der Gerinnungsgeschwindigkeit mit einem Maximum der Stabilität zusammenfallen muß. Dagegen dürften meine Resultate den älteren Theorien von Hardy und Bredig widersprechen; denn nach beiden Theorien müßte im isoelektrischen Punkt ein Minimum der Stabilität liegen, während ich gerade für diesen Punkt ein Maximum der Stabilität gefunden habe.

Von Interesse wäre es noch, festzustellen, ob der isoelektrische Punkt mit jenem Punkt zusammenfällt, bei welchem sich in der Lösung weder freie Säure, noch freie Base befindet, bei welchem also der Ammoniak durch die Salzsäure neutralisiert ist. Der Ammoniakgehalt der benutzten Lösung betrug 0,96 mg, der durch 2,06 mg HCl oder 2 Tropfen Normal-salzsäure neutralisiert wird. Da man 5 Tropfen n. HCl der Lösung zusetzen mußte, um die Wanderungsrichtung umzukehren, so folgt der Satz:

*Im isoelektrischen Punkte befindet sich die Säure in der Lösung im großen Überschuß; bei geringerem Säureüberschuß bleiben die Teilchen elektronegativ.*

Dieses Resultat läßt sich zweifellos auf die Anwesenheit

der adsorbierten, organischen Komponente im Kolloid (Protalbin- oder Lysalbinsäure) zurückführen, deren Amidosäurecharakter auch die Bildung von Säuresalzen zuläßt. Der Salzsäureüberschuß wird jedenfalls, wenigstens zum Teil, zur Bildung von Adsorptionsverbindungen verwendet, in denen das Goldhydrosol adsorbierte *salzsaure* Protalbin- bzw. Lysalbinsäure enthält, die ebenfalls wasserlöslich sind. Leider fehlen bis jetzt messende Versuche über das Säurebindungsvermögen der beiden als Schutzkolloide dienenden Eiweißspaltungsprodukte für sich und in Kombination mit den Metallhydrosolen und es ist daher zurzeit nicht festzustellen, ob der isoelektrische Punkt mit dem der *chemischen* Neutralität (Bildung der Säuresalze) zusammenfällt oder nicht.

Dieses Resultat zeigt, daß sich die von Hardy angeführte Beobachtung, daß die Proteinteilchen bei Gegenwart freier Säure elektropositiv, bei Gegenwart freier Base elektronegativ sind, nicht ohne weiteres verallgemeinern läßt.

#### Protalbin- und lysalbinsaures Natrium.

Die bei Durchgang des Stromes durch eine Goldlösung nach Säurezusatz auftretenden blauen oder grünen Teilchen hatte ich für Teilchen der Schutzkolloide gehalten. Da diese Schutzkolloide — von Paal Protalbin- und Lysalbinsäure genannt — im freien Zustand nicht darstellbar sind, untersuchte ich ihre Natriumsalze. Bei ultramikroskopischer Untersuchung der Lösungen dieser Salze bemerkt man viele Teilchen, deren Farbe weiß, mit blauer oder grüner, selten roter Schattierung ist. Auf Salzsäurezusatz nimmt die Zahl der Teilchen zu, ihre Farbe bleibt unverändert. Diese Teilchen stimmen in der Farbe mit den Teilchen überein, die nach Durchgang des Stromes in der Goldlösung auftreten und die in der Tab. VII als blaue oder grüne Teilchen angeführt sind. Dadurch hat die im Anschluß an Tab. VII über das Entstehen der blauen und grünen Teilchen aufgestellte Vermutung ihre Bestätigung gefunden.

#### Einfluß der Konzentration.

Sowohl mit einer Lösung des roten, wie des blauen Goldes habe ich Versuche angestellt, um den Einfluß der Konzentration auf das Ausfällen zu untersuchen.

Au, III.

Gehalt an Gold  $10^{-4}$  Proz., an Ammoniak  $9,5 \cdot 10^{-4}$  Proz. Diese Lösung hat den halben Gehalt an Gold und Ammoniak wie Au, II. Vor Zusatz der Salzsäure sieht man im Gesichtsfeld etwa 20 Teilchen.

Zu 50 ccm Au, III wurde 1 Tropfen n. HCl zugesetzt; das Verhältnis der Salzsäure zum Gold war also hier dasselbe, wie bei dem zweiten Versuch in Tab. V, bei dem 1 Tropfen n. HCl zu 25 ccm Au, II zugesetzt wurden. Tab. VIII enthält die beiden Beobachtungsreihen nach dem Säurezusatz.

Die Tab. VIII zeigt, daß im ersteren Falle durch die geringere Konzentration eine Verzögerung der Flockenbildung und des Ausfällens bewirkt wird; dagegen ist das Maximum der Teilchenzahl in beiden Fällen das gleiche.

Au, II.

Gehalt an Gold  $2 \cdot 10^{-4}$  Proz., an Ammoniak  $1,9 \cdot 10^{-3}$  Proz., d. h. halb so groß wie bei Au, I.

Vor Zusatz der Salzsäure bemerkt man in 10 Quadranten des Okularnetzes 30 Teilchen.

Tab. IX enthält in der ersten Reihe einen Versuch mit dieser Lösung und zwar wurden 2 Tropfen n. HCl zu 50 ccm dieser Lösung zugesetzt; das Verhältnis der Salzsäure zum Gold ist dasselbe wie bei dem zweiten Versuch in Tab. VI, dessen Resultate zum Vergleich in der 2. Zeile der Tab. IX nochmals angegeben sind.

Tab. VIII sowohl wie Tab. IX zeigen, daß in der verdünnten Lösung das Ausfallen der Teilchen verzögert wird.

Es stimmen diese Resultate mit einer Beobachtung von Prange<sup>1)</sup> überein. Prange hat die Wärme bestimmt, die beim Fällern von kolloidalem Silber auf Zusatz von  $(\text{NH}_4)\text{NO}_3$  frei wird. Er fand, daß beim Ausfällen der gleichen Menge Silber die frei werdende Wärmemenge größer ist, wenn das Silber aus einer verdünnten Lösung gefällt wird. Aus dieser Beobachtung von Prange sowohl, wie aus meinen hier angeführten Beobachtungen ergibt sich der Satz:

*Die Stabilität einer kolloidalen Lösung ist im verdünnten Zustand größer wie im konzentrierteren.*

1) Prange, Rec. d. trav. chim. d. Pays-Bas 9. p. 121. 1900.

Tabelle VIII.

Zusatz von 1 Tropfen n. HCl zu	Teilchenzahl nach																		
	2 <sup>m</sup>	5 <sup>m</sup>	7 <sup>m</sup>	8 <sup>m</sup>	10 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	20 <sup>m</sup>	25 <sup>m</sup>	30 <sup>m</sup>	45 <sup>m</sup>	1 <sup>h</sup>	1 1/4 <sup>h</sup>	1 1/2 <sup>h</sup>	2 <sup>h</sup>	6 <sup>h</sup>	7 1/4 <sup>h</sup>	1 1/4 <sup>h</sup>		
50 ccm Au, III		48		48					38	38	37	37	36	36		38	27	22	18
25 ccm Au, II	50		39		36	31	27	24	21		36		15	15	12				

Tabelle IX.

Zusatz von 2 Tropfen n. HCl zu	Teilchenzahl nach																			
	3 <sup>m</sup>	5 <sup>m</sup>	10 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	20 <sup>m</sup>	30 <sup>m</sup>	45 <sup>m</sup>	1 <sup>h</sup>	1 1/2 <sup>h</sup>	2 1/2 <sup>h</sup>	6 <sup>h</sup>	1 <sup>d</sup>	4 <sup>d</sup>	6 <sup>d</sup>	8 <sup>d</sup>	11 <sup>d</sup>	13 <sup>d</sup>	16 <sup>d</sup>	19 <sup>d</sup>	30 <sup>d</sup>
50 ccm Au, II		24	23	22	22	21		20	20	20	20		18	17	17	17	16	16	15	15
25 ccm Au, I	40	37	35	34	34	33	32	31	30	29	29	27		24	20	15	6			



Versuche mit  $\frac{1}{10}$  n. HCl.

Bei Versuchen mit Zehntelnormalsalzsäure zeigte sich, daß sich Zusätze von Normalsalzsäure und Zehntelnormalsalzsäure bei gleichem HCl-Gehalt in bezug auf ihr Ausfällungsvermögen verschieden verhalten.

In Tab. X gebe ich in der 1. bzw. 2. Zeile die bei Zusatz von 10 bzw. 15 Tropfen  $\frac{1}{10}$  n. HCl in 10 Quadraten beobachteten Teilchenzahlen an, während die 3. bzw. 4. Zeile die auf Zusatz von 1 bzw. 2 Tropfen n. HCl gefundenen Resultate enthalten.

Tabelle X.

		Teilchenzahl nach															
		2 <sup>m</sup>	5 <sup>m</sup>	7 <sup>m</sup>	10 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	20 <sup>m</sup>	25 <sup>m</sup>	30 <sup>m</sup>	35 <sup>m</sup>	45 <sup>m</sup>	1 <sup>h</sup>	1 $\frac{1}{2}$ <sup>h</sup>	2 <sup>h</sup>	4 <sup>h</sup>	5 <sup>h</sup>	8 <sup>h</sup>
1		49	58	52	40	36	34	33	32	31	30	30	29	29	27		24
2		41	50	49		34	31	29	27	24	23	22	20		14		12
3	50		89	86	31	27	24	22				16	15	15			12
4	88	45		89	84	80	28	27				23	19	17			

Fig. 4 enthält vier Kurven, die den Gang der Reaktion für die vier Versuche der Tab. X darstellen.

Bei Untersuchung der Einwirkung von Zehntelnormalsalzsäure auf blaue Goldlösung wurden 10 Tropfen und 1 ccm gleich 25 Tropfen  $\frac{1}{10}$  n. HCl der Goldlösung zugesetzt. Bei dem letzten Versuch wurde die Säure auf einmal in die Lösung gebracht, um dem Einwand zu begegnen, daß das verschiedene Verhalten der beiden Säuren darauf zurückzuführen ist, daß dieselbe Menge HCl bei Zusatz von 1 Tropfen n. HCl auf ein-

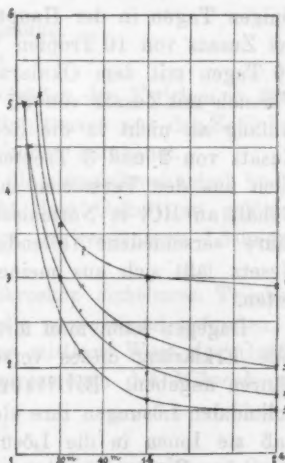


Fig. 4.

mal, bei Zusatz von 10 Tropfen  $\frac{1}{10}$  n. HCl dagegen in kleineren Mengen während einer für die Flockenbildung immerhin in Betracht kommenden Zeit der Lösung zugesetzt wird.

Tab. XI enthält in der 1. und 4. Zeile die beobachteten Teilchenzahlen auf Zusatz von 10 Tropfen bzw. 1 ccm  $\frac{1}{10}$  n. HCl, in der 2., 3. und 5. Zeile zum Vergleich die Beobachtungen auf Zusatz von 1, 2 und 3 Tropfen n. HCl.

Tabelle XI.

	Teilchenzahl nach																		
	3 <sup>m</sup>	5 <sup>m</sup>	10 <sup>m</sup>	15 <sup>m</sup>	20 <sup>m</sup>	30 <sup>m</sup>	45 <sup>m</sup>	1 <sup>h</sup>	1 $\frac{1}{2}$ <sup>h</sup>	2 <sup>h</sup>	6 <sup>h</sup>	1 <sup>d</sup>	2 <sup>d</sup>	6 <sup>d</sup>	11 <sup>d</sup>	13 <sup>d</sup>	16 <sup>d</sup>	18 <sup>d</sup>	21 <sup>d</sup>
1	40	38	36	35	35	34	33	32	31	30	29	22	21			21	17		
2		39	35	34	33	32	31	30		29	28	19							
3	40	37	35	34	34	33	32	31	30		29	27		24	15				
4	33	33	29	27	26	25	25		24		24			20		18		16	13
5	37	37	36	34	35	34	33	32	31	30	29		28	23					17

Ein Vergleich der beiden ersten Reihen der Tab. XI zeigt hauptsächlich im späteren Verlauf des Ausfallens Abweichungen, indem bei Zusatz von 1 Tropfen n. HCl die Teilchen nach einigen Tagen in der Hauptsache ausgefallen waren, während bei Zusatz von 10 Tropfen  $\frac{1}{10}$  n. HCl die Teilchen noch nach 16 Tagen mit dem Okularnetz gezählt werden konnten; der Versuch mit Zusatz von 25 Tropfen  $\frac{1}{10}$  n. HCl reiht sich von Anfang an nicht in die Reihe der angeführten Versuche mit Zusatz von 2 und 3 Tropfen n. HCl ein. Es ergibt sich also auch aus den Versuchen mit blauem Golde, daß der gleiche Gehalt an HCl in Normalsalzsäure und in Zehntelnormalsalzsäure verschiedene fallende Kraft besitzt; ein numerisches Gesetz läßt sich aus meinen einzelnen Versuchen nicht ableiten.

Dagegen kann man mit Hilfe der Theorie von Billitzer eine Erklärung dieses verschiedenen Verhaltens der beiden Säuren angeben. Billitzer nimmt an, daß die Teilchen der kolloidalen Lösungen ihre elektrische Ladung dadurch erhalten, daß sie Ionen in die Lösung entsenden, bis durch elektrostatische Kräfte die Aussendung weiterer Ionen verhindert wird. Dann müßte aber ebenso die Dissoziation der zu-

gesetzten HCl-Moleküle verhindert werden; als Kondensationskerne kommen dann nur die von vornherein freien H-Ionen in Betracht, die aber in beiden Fällen verschieden sind.

#### Einfluß des Lösungswassers.

Eine Lösung des roten Goldes mit dem Goldgehalt  $10^{-3}$  Proz., die mit destilliertem Wasser hergestellt wurde, zeigt nach 2 Jahren noch keine Veränderung; bei der gleichen Lösung des blauen Goldes dagegen war nach 5—6 Monaten die blaue Färbung der Lösung verschwunden, während sich am Boden des Reagensglases ein blauer Niederschlag befand, der durch Aufschütteln wieder in Lösung ging. Diese Lösung zeigte im Ultramikroskop die gleiche Anzahl der Teilchen, wie eine frisch hergestellte. Es setzen sich also in der mit destilliertem Wasser hergestellten Lösung blauen Goldes im Laufe der Zeit Teilchen ab, ohne daß Flockenbildung eintritt.

Bei einer Lösung, die mit Wasserleitungswasser hergestellt worden war, wurden Fällungserscheinungen ähnlich jenen, die auf Zusatz von Salzsäure erfolgen, beobachtet. In beiden Fällen lassen sich die ausgefallenen Teilchen durch Aufschütteln nicht mehr in Lösung bringen.

#### Zusammenfassung.

##### I. Teil.

1. Es wurden die linearen Größen der Teilchen in fünf Lösungen von Paals kolloidalen Substanzen aus der Zahl der Teilchen in einem bestimmten Volumen berechnet.

2. Es wurde festgestellt, daß die ultramikroskopisch beobachtbare Zahl der Teilchen nicht dem Gehalt an gelöster Substanz proportional ist, da erst in verdünnten Lösungen alle Teilchen sichtbar werden.

3. Die Zahl der im Ultramikroskop sichtbaren Teilchen wurde der Intensität der Lichtquelle proportional gefunden.

4. In drei Fällen wurde der mittlere Wert der Größe der Teilchen aus dem Auflösungsvermögen des Mikroskopes bestimmt.

##### II. Teil.

1. Zusatz von Salzsäure zu einer roten und blauen Goldlösung bewirkt Flockenbildung; bei graphischer Darstellung

des zeitlichen Verlaufes dieses Vorganges erhält man eine Kurve der Reaktionsgeschwindigkeit.

2. Bei Untersuchung der Einwirkung der Salzsäure auf beide Goldlösungen wurde ein Maximum und zwei Minima der Stabilität dieser Lösungen gefunden.

3. Das Maximum der Stabilität besitzt die Lösung im isoelektrischen Punkte.

4. Im isoelektrischen Punkte befindet sich in der Lösung freie Säure; bei geringerem Säureüberschuß bleiben die Teilchen negativ elektrisch.

5. Die Stabilität der kolloidalen Lösungen ist im verdünnteren Zustand größer wie im konzentrierteren.

6. Der gleiche Gehalt an HCl in Normalsalzsäure und Zehntelnormalsalzsäure besitzt eine ungleiche fällende Kraft.

7. In einer kolloidalen Lösung, die mit destilliertem Wasser hergestellt ist, bilden die Teilchen keine Flocken; die im gewöhnlichen Wasser enthaltenen Bestandteile üben eine fällende Kraft aus.

Zum Schlusse ist es mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Dr. Wiedemann für die Anregung der Arbeit, diesem Herrn und Hrn. Prof. Dr. Reiger für die liebenswürdige Unterstützung bei Ausführung der Arbeit auch an dieser Stelle meinen besten Dank auszusprechen. Desgleichen danke ich Hrn. Prof. Dr. Paal bestens für die freundliche Überlassung der kolloidalen Substanzen.

(Eingegangen 27. Juli 1908.)

# 10. Zur Geschichte der flüssigen Kristalle; von Fr. Reinitzer.

D. Vorländers Buch über kristallinisch-flüssige Substanzen<sup>1)</sup> hat O. Lehmann veranlaßt in einer kurzen Mittheilung<sup>2)</sup> darzulegen, „wie sich die Kenntnis der Existenz kristallinischer Flüssigkeiten entwickelt hat“. Vorländer schreibt auf p. 3 seines Buches: „Es läßt sich schwer entscheiden, wem das größere Verdienst an dieser Erkenntnis gebührt, Lehmann oder Reinitzer. Deshalb scheint es mir recht und billig zu sein, wenn Lehmann und Reinitzer als Entdecker angeführt werden“. Es ist wohl hauptsächlich, wenn auch nicht ausschließlich diese Stelle, gegen welche sich Lehmann in seiner geschichtlichen Darstellung wendet. Er faßt sie offenbar so auf, daß Vorländer damit ausdrücken wollte, die flüssigen Kristalle seien nicht nur von Lehmann, sondern auch von mir entdeckt. Da jedoch Vorländer unmittelbar vorher sagt: — „Lehmann hat jedoch als erster den Gedanken gehabt, daß Kristalle nicht nur fest, sondern auch ‚fließend‘ sein könnten, und er hat im Jahre 1889 den Satz begründet, daß Cholesterinbenzoat und Jodsilber ‚fließende Kristalle‘ geben“ — so scheint mir Vorländers Meinung die zu sein, daß durch das Ineinandergreifen meiner und der Lehmannschen Beobachtungen, Lehmann zur Entdeckung der flüssigen Kristalle geführt wurde. Da mir diese Meinung richtig erscheint, hatte ich mich bisher nicht veranlaßt gesehen, zu der Äußerung Vorländers Stellung zu nehmen. Lehmann behauptet nun aber in seiner geschichtlichen Darstellung das gerade Gegenteil von dem, was Vorländer angibt. Er sagt<sup>3)</sup>: „Der durch

1) D. Vorländer, Kristallinisch-flüssige Substanzen, Stuttgart, Enke 1908.

2) O. Lehmann, Zur Geschichte der flüssigen Kristalle. Ann. d. Phys. 25. p. 852. 1908.

3) l. c. p. 853 oben.

mehr als 20 Jahre fortgesetzten Arbeit mit diesem Instrument (nämlich dem Kristallisationsmikroskop) ist die Aufdeckung der Existenz der flüssigen Kristalle zu verdanken, nicht einer gelegentlichen Beobachtung des Hrn. Reinitzer über Farbenerrscheinungen und Aggregatpolarisation bei trüben Schmelzen“. Er behauptet, daß die Beobachtungen an meinen Präparaten „die Entstehung des neuen Begriffs nicht einmal wesentlich gefördert<sup>1)</sup>“ hätten und daß „für die Entstehung und weitere Ausbildung des Begriffes der flüssigen Kristalle das Ammoniumnitrat, das Jodsilber, das Ammoniumoleat und die Stoffe der Herren Gattermann, Vorländer und Jaeger“ (d. h. also alle Stoffe, welche Lehmann sowohl vor wie nach meinen Substanzen untersucht hat) „von wesentlich größerem Einfluß“ waren als die meinigen<sup>2)</sup>. Ja, Lehmann scheint sogar jetzt zu bedauern, daß er durch die Untersuchung meiner Substanzen in der Verfolgung seiner Ziele aufgehalten worden ist, denn er erklärt, daß ihre Untersuchung „einen ganz enormen unnötigen Zeitaufwand“ erfordert habe, „und schließlich ergab sich doch nicht mehr als das, was bereits bei Jodsilber gefunden war, mit Ausnahme dessen, daß fließende Kristalle nicht notwendig dem regulären System angehören müssen, sondern auch doppelbrechend sein können und daß ihre Fluidität die des Jodsilbers erheblich übersteigen kann“.<sup>3)</sup>

Die Meinungsverschiedenheit zwischen Lehmann und Vorländer dreht sich also hauptsächlich um die Frage, wie weit die Beobachtungen an meinen Substanzen für die Entstehung des Begriffes der flüssigen Kristalle von Bedeutung gewesen sind. Da ich somit unmittelbar an diesem Streitfalle beteiligt bin und mich auch nicht mit allem was Lehmann über ihn äußert, einverstanden erklären kann, so will ich im folgenden eine Darstellung des Sachverhaltes geben und hierzu auch die Briefe heranziehen, die in dieser Angelegenheit zwischen mir und Lehmann gewechselt worden sind. Lehmann hatte die Freundlichkeit, mir zu diesem Behufe die Briefe, die ich ihm seinerzeit geschrieben habe, für einige Zeit zur Einsicht zu überlassen.

1) O. Lehmann, l. c. p. 859 unten.

2) l. c. p. 860 unten.

3) l. c. p. 859 u. 860.

Lehmann schreibt, ich hätte mich bemüht, das Cholesterin rein darzustellen<sup>1)</sup> und es sei für meine Entdeckung besonders der Umstand förderlich gewesen, daß ich von der chemischen Fabrik H. Trommsdorf ein sehr reines Cholesterin erhalten hatte.<sup>2)</sup> Dem gegenüber bemerke ich, daß mir Trommsdorf ein gewöhnliches Handelscholesterin geliefert hatte, das ich mir selbst durch wiederholte Behandlung mit alkoholischer Kalilauge reinigte, daß auch andere vor mir ein so gereinigtes Cholesterin verwendeten und daß meine Bemühungen zunächst darauf gerichtet waren, durch sorgfältige Analyse brauchbarer Abkömmlinge, die damals noch unsichere Formel des Cholesterins festzustellen. Letzterem Zwecke sollte auch eine Bestimmung des Benzoësäuregehaltes des Benzoates dienen, weshalb ich es durch oftmaliges Umkristallisieren auf den höchsten erreichbaren Schmelzpunkt zu bringen trachtete. Dieser blieb aber stets 5° tiefer als ihn Schulze in Zürich vor mir gefunden hatte, die geschmolzene Masse war stets trüb und schien, bei schwachen Vergrößerungen betrachtet, einen ungeschmolzenen Körper zu enthalten, den ich deshalb durch stärkeres Erhitzen zu schmelzen suchte. So kam ich zur Entdeckung des Klärungspunktes und der sich daran anschließenden Farbenerscheinung, die mir so seltsam und ungewöhnlich erschien, daß ich sie auf einem Objektträger unter dem Mikroskope in gewöhnlichem und polarisiertem Lichte sorgfältig untersuchte. Dasselbe tat ich dann auch mit der Farbenerscheinung des Azetats. Daß die von mir erhaltenen Kristalle des Benzoats und Azetats klar durchsichtig waren, was Lehmann als etwas Besonderes hervorhebt, war für die Entdeckung der Erscheinung nebensächlich, da auch nicht ganz reine Kristalle klar durchsichtig sind.

O. Lehmann hebt ferner hervor, es sei schon früher bekannt gewesen, „daß sich beim Schmelzen und Erstarren von Cholesterinverbindungen merkwürdige Erscheinungen, insbesondere auffällige Farben zeigen“. In dieser Form ausgedrückt muß man glauben, daß außer den Farbenerscheinungen noch andere merkwürdige Erscheinungen bekannt waren. Dem ist

1) O. Lehmann, l. c. p. 855

2) l. c. p. 855, Anm. 1.



aber nicht so. Was vor meinen Beobachtungen bekannt war, ist, wie ich schon in meiner Cholesterinarbeit angegeben habe, folgendes: Planer<sup>1)</sup> gab 1861 an, daß Cholesterylchlorid während des Erkaltsens der geschmolzenen Masse im auffallenden Lichte eine lebhaft violette, im durchfallenden eine gelblich-grüne Farbe zeige und beim vollständigen Erkalten wieder kristallinisch werde. Löbisch<sup>2)</sup> theilte 1872 mit, daß das Cholesterylamin beim Schmelzen eine bläulich-violette, dem Edelopal ähnliche „Fluoreszenz“ zeige, und das Cholesterylchlorid sich ganz ähnlich verhalte. Raymann<sup>3)</sup> erwähnte 1887 ganz kurz, daß das Cholesterylazetat beim Schmelzen an den dünnsten Stellen zu fluoreszieren beginne. Das war alles. Der Grund dafür, daß man sich auf diese wenigen mageren Bemerkungen und Beobachtungen beschränkte war nicht, wie Lehmann meint<sup>4)</sup>, die ungenügende Reinheit der dargestellten Präparate, sondern einzig der Umstand, daß meine Vorgänger der Erscheinung keine besondere Wichtigkeit beilegen und daher nicht das Bestreben hatten, sie näher zu untersuchen. Die Erscheinungen wurden eben weiter gar nicht beachtet und erst als ich sie am Benzoat, an dem sie noch ganz unbekannt waren, entdeckt hatte, wurde ich nachträglich darauf aufmerksam, daß sie auch andere vor mir gesehen haben müssen. Wenn ich also Erscheinungen, die meine Vorgänger entweder gar nicht gesehen hatten oder an denen sie achtlos vorübergegangen waren, genau untersuchte, so war dies doch wohl nicht nur eine „gelegentliche Beobachtung“ wie Lehmann meint.<sup>5)</sup> Als solche muß man vielmehr das bezeichnen, was Planer, Löbisch und Raymann bemerkt hatten, darum blieben diese Beobachtungen auch gänzlich unbeachtet. Lehmann hat sie ebensowenig beachtet wie ich, obwohl er sich mit dem Studium von Schmelzflüssen, Kristallen und ihren Formänderungen planmäßig beschäftigte, und daher in der Literatur am ehesten hätte auf sie stoßen müssen. Er beschäftigte sich aber mit den Erscheinungen

1) Planer, Liebigs Ann. 118. p. 25. 1861.

2) Löbisch, Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. 5. p. 510. 1872.

3) Raymann, Bull. de la soc. chim. de Paris 47. p. 898.

4) l. c. p. 855, Anm. 1.

5) l. c. p. 858, oben.



der Cholesterinverbindungen erst, als ich ihm meine Präparate zur Untersuchung gesandt hatte, obwohl Planer seine Beobachtungen schon 27 Jahre vor den meinigen gemacht hatte. Was die sonstigen „merkwürdigen Erscheinungen“ anbelangt, welche beim Schmelzen und Erstarren von Cholesterinverbindungen schon früher bekannt gewesen sein sollen, so könnte es sich nur um die trübe Schmelze des Cholesterylbenzoats und ihren Klärungspunkt handeln. Diese Erscheinung hat aber vor mir niemand gesehen. Der Körper ist vor mir nur von Berthelot<sup>1)</sup> und von Schulze<sup>2)</sup> dargestellt und beschrieben worden. Keiner von beiden erwähnt jedoch auch nur ein Wort von dieser Erscheinung. Lehmann meint zwar<sup>3)</sup>, daß die trübe Schmelze schon von Berthelot am Cholesterylbutyrat beobachtet worden sei. Das ist aber nicht der Fall. Berthelot erwähnt vom Butyrat, daß es, einmal geschmolzen, nach Art eines Harzes bis fast zu gewöhnlicher Temperatur halbweich und durchscheinend bleibe. Dabei ist also von einer trüben Schmelze keine Rede, denn das Wort „durchscheinend“ bezieht sich nur auf das langsame Erstarren des Butyrats und soll offenbar besagen, daß der Körper beim Erstarren nicht sogleich ganz undurchsichtig wird.

Als ich Lehmann bat, meine Substanzen zu untersuchen, hatte ich durch mikroskopische Beobachtung bereits genau alle Einzelheiten festgestellt, die mir mit meinen Mitteln erreichbar waren. Ich gab schon in meinem ersten Brief an Lehmann vom 14. März 1888 eine ausführliche Beschreibung aller Erscheinungen, beschrieb das Auftreten von eigentümlichen sternförmigen Kristallaggregaten in der trüben Schmelze und gab auch an, daß beim Schmelzen des Benzoats die Trübung „nicht durch Kristalle (die nur beim Auskühlen der klaren Schmelze auftreten), sondern durch eine Flüssigkeit bewirkt“ werde, „welche in der geschmolzenen Masse ölige Streifen bildet und bei gekreuzten Nicols hell erscheint“. Weiter schrieb ich, daß dies „offenbar die bei höherer Temperatur schmelzende Modifikation der Substanz, aber im nicht

1) M. Berthelot, Ann. chim. et phys. [3] 56. p. 61 1859.

2) Schulze, Journ. pr. Chem. [2] 7. p. 170.

3) l. c. p. 859, 3. Absatz.

kristallisierten Zustände“ sei. Gleichzeitig teilte ich ihm meinen eigenen Erklärungsversuch mit. Ich schrieb, daß mir „das gleichzeitige Auftreten von Kristallen und amorpher geschmolzener Masse“ am auffallendsten erscheine und daß die Erscheinung den Eindruck mache, „wie wenn sich die Substanz bei der betreffenden Temperatur in zwei verschiedene Körper trennen würde“. Letzterer Ansicht schloß sich auch Lehmann zunächst an und veröffentlichte sie später in seiner Molekularphysik.<sup>1)</sup> Er schrieb mir am 27. März, daß er sich mit der Untersuchung wegen Zeitmangel nicht in dem Maße beschäftigen konnte wie er wünschen würde und sandte mir eine Beschreibung der von ihm aufgefundenen drei Modifikationen des Azetats und Benzoats, sowie seiner Beobachtungen über die Farbenerscheinung. Dabei erwähnte er, daß meine sternförmigen Kristallaggregate keine Kristalle, sondern Tropfen seien, die durch eingeschlossene Kristallblättchen, welche nur bei starken Vergrößerungen wahrgenommen werden können, eine zackige Gestalt erhalten. Ich antwortete darauf am 2. April, daß ich nunmehr geneigt sei anzunehmen, daß die eingeschlossenen Kristallblättchen „bei der hohen, ihrem Schmelzpunkt naheliegenden Temperatur noch so weich sind, daß sie sich gleichsam zerkneten lassen und in sehr kleine Bruchstückchen zerfallen, welche sich innig mit der Flüssigkeit mengen“. Ferner, daß mir diese Annahme nicht zu gewagt erscheine „da sich makroskopisch beobachten läßt, daß sowohl Cholesterin wie seine Abkömmlinge nahe dem Schmelzpunkt eine zähe, harzartige Beschaffenheit zeigen“.

In seiner Antwort vom 4. April bat mich zunächst Lehmann um weiteres Untersuchungsmaterial, da er im Laufe des Sommersemesters jedenfalls Zeit finden werde, sich *dann und wann* damit zu beschäftigen. Dann teilte er mir mit, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen seinen und meinen Beobachtungen darin bestehe, daß ich deutlich Kristalle sehe, er aber solche nicht zu erkennen vermöge und ihre Anwesenheit nur aus den Polarisationserscheinungen schließe. Dazu gab er eine Zeichnung, die deutlich unregelmäßig begrenzte Tropfen mit Polarisationskreuz zeigt. Man sieht, daß wir da beide

1) O. Lehmann. Molekularphysik II, p. 592, 1. Absatz.

schon ganz nahe vor der Erkenntnis der flüssigen Kristalle standen, ohne aber diesen Gedanken zu erfassen. In meiner Antwort vom 10. April gab ich nun zur Aufklärung unserer abweichenden Beobachtungen eine Zeichnung der von mir beobachteten öligen Streifen und der Kristallaggregate und teilte mit, daß letztere während der Abkühlung vom Umfange her abschmelzen und als feste Körper in einer isotropen Flüssigkeit schwimmen. Lehmann antwortete mir am 13. April. Er erklärte, durch meine Zeichnung nun die Übereinstimmung zwischen meinen und seinen Beobachtungen zu erkennen, mit Ausnahme des Umstandes, daß er niemals so schön rechtwinklig gezackte Formen gesehen habe, wie sie meine Zeichnung darstellt. Die meisten Bedenken mache ihm aber der Umstand, daß er die Kristalle nicht so isolieren könne, daß er deutlich hätte die Umgrenzung beobachten können. Er schrieb dann: „das vorliegende Präparat ist das erste, welches mir ernstliche Verlegenheiten bereitet, so sehr, daß, wenn nicht die Polarisationserscheinungen und das zuweilen feste Anhaften der Gebilde am Glase dafür sprächen, daß sie Kristalle sind, ich eher an Tropfen denken möchte, obschon ich niemals die charakteristische Kugelform habe sehen können“. — „Man kann sehr schöne fast kreisrunde derartige Gebilde mit schwarzem Kreuz erhalten, um welche die übrige, bereits flüssig gewordene Masse herumströmt und in welcher sie nach und nach verschwinden. Bei sehr langsamer Kristallisation erhält man sogar ziemlich einfache Figuren, welche nicht mehr das schwarze Kreuz zeigen, sondern einheitlich auslöschen, wie wahre Kristalle, aber stets mit verschwommenen Rändern. Die hellen Streifen, welche das Netzwerk beim Cholesterylbenzoat bilden, sind offenbar ganz gleicher Natur, an den Kreuzungspunkten zeigen sich deutlich Rudimente des schwarzen Kreuzes und sie löschen, wenn geradlinig, auf der ganzen Länge gleichzeitig aus, sind aber so beweglich, daß sie höchstens als Aggregate äußerst feiner Lamellen betrachtet werden können. Weshalb aber sollen diese sich so ordnen, daß die Schwingungsrichtungen parallel sind und weshalb ordnen sie sich in der umschlossenen Masse so, daß diese Zirkularpolarisationsfarben zeigt? Diesen Punkt kann ich nicht verstehen, wenn es wirklich Kristalllamellen sind und ich habe mir gestern und heute wieder

vergeblich stundenlang die Erscheinung betrachtet. Auch Geheimrat Wüllner hat sich diese Streifen und Lamellen mit mir wiederholt angesehen und wir konnten beim besten Willen nicht darüber klar werden.“

Diese Briefstelle ist sehr lehrreich. Man sieht, wie außerordentlich nahe hier Lehmann vor der Erkenntnis der flüssigen (oder fließenden) Kristalle stand und doch war er noch immer nicht imstande, diesen Begriff aufzustellen und sich von den hergebrachten Ansichten loszumachen. Wäre ihm damals der Begriff der flüssigen Kristalle vom Jodsilber her schon so geläufig gewesen, wie er jetzt nachträglich glaubt, so hätte er sofort auf ihn verfallen müssen und es wäre unmöglich gewesen, daß er trotz stundenlanger Beobachtung zu keiner klaren Erkenntnis gekommen ist. Aus seiner Briefstelle ist aber deutlich zu sehen, daß er durch meine Substanz vor ein ganz neues Problem gestellt worden ist, das mit den bisherigen Anschauungen nicht erklärbar war und das ihn *zwang*, nach einer neuen Erklärung zu suchen. Wenn also Lehmann von der Untersuchung meiner Substanzen jetzt schreibt<sup>1)</sup> „und schließlich ergab sich doch nicht mehr als das, was bereits bei Jodsilber gefunden war, mit Ausnahme dessen, daß fließende Kristalle nicht notwendig dem regulären System angehören müssen usw.“, so hat ihn die Erinnerung an die damaligen Vorgänge doch bedeutend im Stiche gelassen, denn aus der eben mitgeteilten Briefstelle ist deutlich zu sehen, daß die Vorstellung, die er sich nach seinen Untersuchungen am Jodsilber von weichen Kristallen gebildet hatte, ihn in keiner Weise an die vorliegenden Erscheinungen erinnerten, obwohl er sie stundenlang betrachtete und sich mühte, eine Erklärung für die rätselhafte Erscheinung zu finden.

Am 20. April teilte ich Lehmann eine neue Beobachtung mit. Ich hatte gefunden, daß das Benzoat durch sehr häufiges Schmelzen etwas zersetzt, schwach gelblich und im Schmelzfluß zähflüssig wird und die Neigung erhält, beim Erstarren teilweise glasig zu bleiben. Durch rasches Abkühlen erhielt ich eine „völlig harte, starre Masse“, in welcher die Farbenerscheinung als blauer Streifen *dauernd* sichtbar blieb. Ich

1) O. Lehmann, l. c. p. 859 unten.

beschrieb und zeichnete die an dieser Stelle sichtbaren zahlreichen kleinen Blättchen und sagte von ihnen, daß sie ganz so aussehen, „wie angefressene, in Lösung begriffene Kristalle“. Weiter heißt es: „In diesem zersetzten Benzoat beobachtete ich auch zweimal hintereinander beim Auftreten der blauen Farbenerscheinung sehr schöne, sternartige Aggregate, genau so, wie ich sie in meinem letzten Briefe in Fig. 2 dargestellt habe, nur noch mit *viel schöneren Winkeln und Kanten*, die so scharf waren, daß ich an ihrem Vorhandensein nicht zweifeln kann.“ „Jetzt fällt mir auch auf, daß ich *alle* meine früheren Versuche *fort mit derselben Substanz* ausfuhrte. Dieselbe dürfte somit vielleicht schon früher etwas zersetzt gewesen sein und daher die Sternzeichnung deutlich gezeigt haben. In der Tat kann ich bei frischer Substanz die Sternzeichnung trotz aller Mühe nicht bekommen.“ Damit war die Ursache der einzigen Verschiedenheit zwischen unseren Beobachtungen aufgeklärt und gleichzeitig jene von Lehmann so lange vergeblich gesuchte Substanz gefunden, durch die es gelingt, die Kristalle zu isolieren und so ihre Umrißlinien scharf sichtbar zu machen. Ich sandte Lehmann einen Objektträger mit derartig veränderter Substanz, doch wurde sie von ihm vorläufig nicht beachtet. Seine Aufmerksamkeit war vielmehr den „öligem Streifen“ zugewandt. Er schrieb mir an 24./4.: . . . „ganz unverständlich sind mir die hellen „öligem Streifen“, die sich aus solchen Kristalllamellen zusammensetzen sollen, die einheitlich auslöschen und an den Kreuzungspunkten ganz so aussehen wie die vereinzelteten Lamellen, während die Masse zwischen den Streifen schöne Polarisationsfarben zeigt. Die Ränder der Streifen sind häufig ganz glatt und *die Beweglichkeit ist so groß, daß man sie notwendig für flüssig halten muß*. Besonders schön zeigt die Erscheinung ein Gemenge von Cholesteryl- und Hydrocarotylbenzoat. Zuweilen sieht man vereinzeltete Lamellen auf dem Objektträger haften, während die öligem Streifen darüber hinfließen, trotzdem scheint mir die Polarisation der Streifen gleicher Natur zu sein, wie die der Lamellen, ja es scheinen alle Übergänge zwischen den *kristallinen* Lamellen und den *flüssigen* Streifen möglich zu sein, d. h. das Unmögliche wird hier möglich. Wüllner meinte, die Substanz mache auf ihn einen ganz unheimlichen

Eindruck. Mir geht es fast ebenso.“ Diese Briefstelle zeigt zum zweiten Male, daß hier Lehmann vor einer ganz neuen, ihm völlig unverständlichen Erscheinung stand, die doch noch anderes ergab „als das, was bereits bei Jodsilber gefunden war“. Auch Vorländers Meinung, daß Lehmann „sogleich die nahen Beziehungen zwischen den neuen Erscheinungen und seinen älteren Beobachtungen am Jodsilber“ erkannt habe<sup>1)</sup>, ist hiernach irrig.

Mit diesem Briefe brach unser Briefwechsel auf 16 Monate ab. Am 20. August 1889 endlich schrieb er mir: „Infolge zweimaligen Wechsels meiner Stellung (Aachen-Dresden und Dresden-Karlsruhe) war es mir unmöglich, mich mit der weiteren Untersuchung Ihrer interessanten Präparate zu befassen. Kürzlich hatte ich indes einige Muße, welche ich dazu benutzte, die Umwandlung des Cholesterylbenzoats in die schleimige Masse, welche früher als ‚Gries‘ bezeichnet wurde<sup>2)</sup>, näher zu studieren, wobei mir Ihre Wahrnehmung, daß durch längeres Erhitzen die gesuchte, mit dem Schmelzfluß ohne erhebliche Erniedrigung des Schmelzpunktes mischbare Substanz erhalten werden könne, wesentliche Dienste leistete.“

Dann heißt es weiter: „Was nun die Resultate dieser neueren Untersuchung anbelangt, so bestätigen sie ganz eine von Ihnen früher geäußerte Ansicht, daß der ‚Gries‘ aus sehr weichen Kristallen besteht, welche als physikalisch isomere Modifikation der Substanz zu betrachten sind und zwar ist die Masse ganz einheitlich und nicht etwa neben diesen Kristallen, wie Sie anfänglich vermuteten, noch eine fremde Flüssigkeit vorhanden.“ Der Brief schließt mit dem Satze: „Für den Physiker ist es jedenfalls von hohem Interesse, daß Kristalle existieren, deren Weichheit eine so bedeutende ist, daß man sie beinahe flüssig nennen könnte.“

Daraus ist also ersichtlich, daß Lehmann erst nach 16 Monaten meine letzte Beobachtung, die ich ihm am 20. April 1888 mitgeteilt hatte, aufgegriffen hat und nun

1) D. Vorländer, Kristallinisch-flüssige Substanzen p. 3.

2) Dieses, zuerst von Lehmann benutzte Wort, diente in unserem Briefwechsel zur Bezeichnung der Substanz, welche im Benzoat die Trübung bewirkt.

nach verhältnismäßig kurzer Zeit zu voller Klarheit der Verhältnisse kam, denn schon am 30. August 1889, 10 Tage nach diesem letzten Briefe, sandte er an die Zeitschr. f. physik. Chem. seine Arbeit „Über fließende Kristalle“, worin er im wesentlichen die Beobachtungen an meinen Substanzen mitteilte. Diese Abhandlung schließt mit dem Satze: „Gibt man diese Deutung der Beobachtungen als richtig zu, so läge hier *ein bis jetzt einzig dastehender Fall vor*, daß eine kristallisierte und stark doppelbrechende Substanz so geringe Festigkeit besitzt, daß sie nicht imstande ist, auch nur der Einwirkung des eigenen Gewichts Widerstand zu leisten.“

Aus allen diesen Angaben geht also wohl mit unbestreitbarer Deutlichkeit hervor, daß die fließenden Kristalle mit voller Klarheit von Lehmann zuerst an meinen Substanzen als solche erkannt worden sind. Ebenso deutlich ist ersichtlich, daß die Erkenntnis von Lehmann ausgegangen ist, daß aber dabei auch von mir ein gutes Stück Arbeit dazu geleistet worden ist. Ich habe mich nicht damit begnügt, eine gelegentliche Beobachtung einem anderen zur Bearbeitung zu übersenden, sondern habe nach Kräften an der Lösung der Frage mitgearbeitet. Auch wird man wohl einräumen, daß die Entdeckung der Erscheinung selbst, trotz meiner Vorgänger, durch mich erfolgt ist.

Weiteres ist aus dieser Darstellung klar ersichtlich, wie weit Lehmanns Angabe berechtigt ist, daß die Untersuchung meiner Substanzen „einen ganz enormen unnötigen Zeitaufwand“ erfordert habe. Lehmann hat während dieser  $1\frac{1}{2}$  Jahre seine Molekularphysik herausgegeben und zweimal seine Stellung gewechselt. Aus mehreren Stellen seiner Briefe geht deutlich hervor, daß er sich immer nur verhältnismäßig kurze Zeit mit meinen Substanzen beschäftigt hat. Wenn er heute den Eindruck zurückbehalten hat, daß die Untersuchung einen ungewöhnlich großen Zeitaufwand erfordert habe, so mag dies davon herrühren, weil es sich darum gehandelt hat, eine tatsächlich sehr harte Nuß zu knacken.

Lehmann legt einen großen Wert darauf, daß er durch Untersuchung meiner Substanzen auf keinen Fall zur Erkenntnis der flüssigen Kristalle (im Gegensatz zu den fließenden)



gekommen sei.<sup>1)</sup> Dies ist zweifellos richtig, aber ebenso richtig ist es auch, daß der Erkenntnisschritt von den starren oder knetbaren zu den fließenden Kristallen weitaus schwieriger war, als jener von den fließenden zu den flüssigen, denn die fließenden Kristalle waren eine neue, ganz ungewöhnliche Erscheinung, die flüssigen dagegen nur eine natürliche Weiterbildung der fließenden, dies um so mehr, als die Elastizitätsgrenze der fließenden Kristalle des Cholesterylbenzoats von dem Werte 0 sehr wenig weit entfernt ist. Lehmann hat auch selbst in seinen Abhandlungen über flüssige Kristalle hervorgehoben, daß es nach den Erfahrungen an meinen Substanzen sehr nahe lag, zu fragen, ob nicht die Möglichkeit besteht, daß ein Kristall *wirklich* die Elastizitätsgrenze 0 hätte, also wirklich flüssig wäre.<sup>2)</sup>

Waren einmal die *fließenden* Kristalle als solche erkannt, so war es nicht mehr schwierig, auch die *flüssigen* zu erkennen und wenn man eine Geschichte der Erkenntnis letzterer schreiben will, so wird man doch wohl die Erkenntnis der fließenden Kristalle als Ausgangspunkt nehmen müssen.

Wenn ferner Lehmann schreibt, daß die „*Aufdeckung*“ der Existenz der flüssigen Kristalle der durch mehr als 20 Jahre fortgesetzten Arbeit mit dem Kristallisationsmikroskop zu verdanken sei und nicht einer von mir gemachten gelegentlichen Beobachtung, so verwechselt er die Aufdeckung mit der weiteren Ausbildung, Ausgestaltung und wissenschaftlichen Bearbeitung dieses Kenntnisgebietes. Zur *Entdeckung* der fließenden oder flüssigen Kristalle waren nicht 20 Jahre nötig.

Damit dürfte wohl das Verhältnis, in welchem ich zur Entdeckung der fließenden und flüssigen Kristalle stehe, genügend klargestellt sein.

Graz, Botanisches Inst. d. techn. Hochschule, Juli 1908.

1) O. Lehmann, l. c. p. 858.

2) O. Lehmann, Über tropfbar flüssige Kristalle, Wied. Ann. 40. p. 402. 2. Absatz 1890. — Über die Definition des Begriffes „Kristall“, Zeitschr. f. Kristallogr. 18. p. 462. 1. Absatz 1890.

(Eingegangen 9. Juli 1908.)



# 11. *Über Hertz'sche Spiegelversuche mit dem Duddelschen Bogen; von N. Stschodro.*

Im Jahre 1900 hatte Duddel<sup>1)</sup> eine Methode angegeben, ungedämpfte elektrische Schwingungen dadurch zu erhalten, daß man einem Gleichstromkohlenlichtbogen eine Kapazität und eine Selbstinduktion parallel schaltet; nach dieser Methode ließen sich Schwingungen erzeugen, welche von wenigen Hunderten pro Sekunde bis zu 40 000 pro Sek. ( $\lambda = 8000$  m) gingen.

Bei Anwendung gekühlter Metallelektroden gelang es Paulsen<sup>2)</sup>, die Anzahl der Schwingungen bis auf eine Million zu bringen und die erhaltenen Wellen  $\lambda = 300$  m für die drahtlose Telegraphie zu verwenden.

Auf Veranlassung von Prof. Dr. P. Lebedew habe ich es unternommen, nach dieser Methode noch kürzere Wellen zu erzeugen. Die Versuche zeigten bald, daß Wellen  $\lambda < 1$  m leicht erhalten werden können, mit welchen sich die klassischen Spiegelversuche von Hertz wiederholen lassen.

## I. Die Apparate.

Der *Primärleiter* (Fig. 1) besteht wie bei Hertz aus zwei Zylindern ( $l = 13$  cm;  $d = 3$  cm), welche durch zwei Glasstäbe *GG* und Metallklemmen *MM* zusammengehalten werden. Die kupferne Stirnfläche des unteren Zylinders wird durch einen dauernden Wasserstrom gekühlt, die Stirnfläche des oberen Zylinders trägt ein Gewinde, in welchem sich ein Stift mit einer Silberspitze fein einstellen läßt.

Der Strom wird von einer 500 Volt-Gleichstromdynamo unter Einschaltung von Ballastwiderstand und Drosselspulen

1) W. Duddel, The Electrician 46. p. 269. 1900.

2) W. Paulsen, Elektrotechn. Zeitschr. 27. p. 1070. 1906.

geliefert; die günstigste Stromstärke beträgt  $0,7-0,8$  Amp. bei einer Bogenlänge von  $0,5$  mm. War die Silberspitze Anode, so waren die Schwingungen intensiver; war sie Kathode, so waren die Schwingungen schwächer.

Die Empfänger wurden in zwei verschiedenen Formen verwendet.

Bei dem ersten waren nach J. Klemenčič und P. Czermak<sup>1)</sup> zwei geradlinige Resonatoren (Länge je  $25$  cm, Breite je  $5$  cm); beide Resonatoren waren durch ein thermoelektrisches Kreuz aus dünnen Drähten (Durchmesser  $d = 0,025$  mm) von Konstantan und Platin gebildet.

Bei dem zweiten Empfänger wurde seine Grundschiwingung beobachtet: zwei Zinkstreifen von je  $9$  cm Länge und  $5$  cm Breite waren durch ein thermoelektrisches Kreuz, wie bei dem ersten, verbunden.

Als Galvanometer diente ein d'Arsonvalinstrument (von Hartmann & Braun), welches mit objektiver Ablesung versehen war; bei  $4$  Ohm Widerstand hatte es eine Stromempfindlichkeit  $i = 3 \cdot 10^{-7}$  Amp. pro  $1$  mm Ablenkung. Die Ablenkungen er-

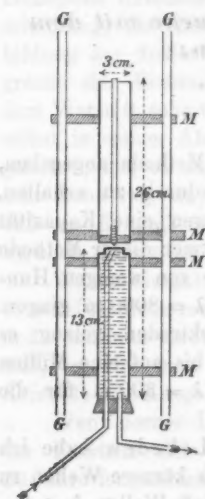


Fig. 1.

reichen unter Umständen  $75$  mm, was einer Erwärmung des Thermoelementes um  $1,5^{\circ}$  C. entsprach.

Die Spiegel waren den Originalspiegeln von Hertz nachgebildet; sie hatten eine Vokallänge von  $12,5$  cm bei  $2$  m Höhe und  $1,2$  m Öffnung.

Das Gitter war aus  $0,5$  mm dicken Kupferdrähten gebildet, welche in  $2,5$  cm Abstand voneinander aufgespannt waren.

Die Boltzmannschen Interferenzspiegel hatten je  $2$  m Höhe und  $1$  m Breite.

## II. Die Versuche.

Stellt man die beiden Spiegel in etwa  $2$  m Entfernung gegenüber, so entstehen beim Entzünden des Bogens Galvano-

1) J. Klemenčič u. P. Czermak, Wied. Ann. 50. p. 186. 1893.

meterausschläge, welche ca. 70 mm betragen. Diese Ablenkungen sind nicht konstant: jede Veränderung im Bogen, welche bei dem kleinen Bogen nie ausbleiben, werden von entsprechenden Schwankungen der Galvanometerablenkung begleitet.

Der Polarisationsversuch läßt sich leicht ausführen. Stehen die Spiegel parallel, so ist bei der senkrechten Richtung der Drähte des Gitters der Ausschlag 70 mm und bei parallel gestellten Drähten nur 1—2 mm. Bei gekreuzten Spiegeln ist kein Ausschlag nachweisbar; wird das Drahtgitter unter  $45^\circ$  eingeschoben, so entsteht ein Ausschlag von 25—30 mm.

Die Interferenzversuche mit den Boltzmannschen Spiegeln, welche in 3 m Entfernung von den Hertz'schen Spiegeln aufgestellt waren, ergaben denselben Verlauf der Interferenzkurven, wie er von Klemenčič und Czermak<sup>1)</sup> beobachtet wurde, wie es die Fig. 2 zeigt: für den Doppelresonator ergibt

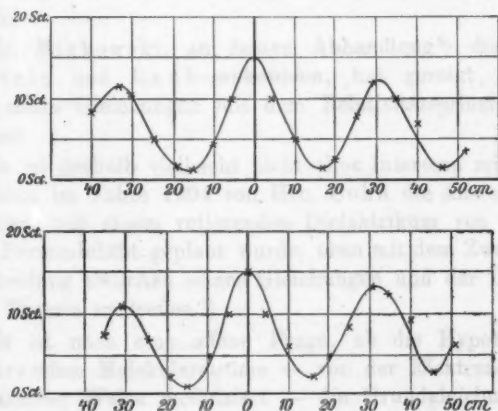


Fig. 2.

sich die Wellenlänge  $\lambda_a = 63$  cm und für den einfachen Empfänger  $\lambda_e = 61$  cm.

Untersuchungen über Interferenzerscheinungen bei großen Gangunterschieden konnten mit den beschriebenen Apparaten

1) J. Klemenčič u. P. Czermak, Wied. Ann. 50. p. 185. 1893.

leider nicht gemacht werden, da die auftretenden Diffraktionserscheinungen den Verlauf der Interferenzen verwischen.

Die beschriebenen Versuche lehren, daß man mit Hilfe des Duddelschen Bogens unter den einfachsten Versuchsbedingungen Hertz'sche Wellen erzeugen kann, welche vielmehr Energie mit sich führen als diejenigen, welche man mit einem Induktorium erzeugen kann.

Herrn Prof. Dr. P. Lebedew erlaube ich mir für die Anregung und die Leitung der Untersuchung meinen Dank auszusprechen.

Moskau, Physikal. Inst. der Universität, im Juni 1908.

(Eingegangen 14. Juli 1908.)



**12. Rotierendes Dielektrikum im magnetischen Felde;  
von J. A. Vollgraff.**

Von den Herren Einstein und Laub<sup>1)</sup> wird bemerkt, daß die Bewegung eines Dielektrikums in einem magnetischen Felde ein elektrisches Feld erzeugt, welches nach der Relativitätstheorie einen anderen Wert hat als nach der Lorentzschen Theorie.

Hr. Minkowski, an dessen Abhandlung<sup>2)</sup> die Herren Einstein und Laub anknüpfen, hat gezeigt, daß die Cohnschen Gleichungen mit dem Relativitätsprinzip vereinbar sind.

Es ist deshalb vielleicht nicht ohne Interesse mitzuteilen, daß schon im Jahre 1904 von Hrn. Cohn die Anstellung von Versuchen mit einem rotierenden Dielektrikum von beträchtlicher Permeabilität geplant wurde, eben mit dem Zwecke, eine Entscheidung zwischen seinen Gleichungen und der Lorentzschen Theorie zu treffen.<sup>3)</sup>

Es ist noch eine offene Frage, ob die Hypothese der Ampèreschen Molekularströme — von der Elektronentheorie in bekannter Weise modifiziert — die Grundgleichungen des Feldes in derjenigen Form ergibt, welche mit den wahr-

1) A. Einstein und J. Laub, Ann. d. Phys. 26. p. 539. 1908, Gleichungen (2) und (3).

2) H. Minkowski, Göttinger Nachr 1908.

3) An diesen Versuchen sollten Hr. R. Feustel und der Autor dieser Zeilen sich beteiligen. Es kam jedoch nur zu den Vorversuchen (Konstruktion eines Elektrometers usw.). Eine bestimmte Wahl für das Dielektrikum wurde nicht getroffen.

nehmbaren Erscheinungen am besten in Einklang steht. Aus diesem Grunde muß das genannte Experiment als ein sehr wichtiges betrachtet werden. Sollte es sich nämlich zeigen, daß das Feld mit  $(\epsilon - 1)\mu$  proportional ist — und nicht mit  $(\epsilon\mu - 1)$ , — so würde dieses Resultat als eine Stütze für die Elektronentheorie der Magnetisierung betrachtet werden können.

Leiden, 20. Juli 1908.

(Eingegangen 24. Juli 1908.)

**13. Bemerkung**  
**zu der Abhandlung des Hrn. F. Paschen**  
**betreffs der Dispersion des Steinsalzes und**  
**Sylvins im Ultrarot;**  
**von A. Trowbridge.**

In seiner sehr interessanten Abhandlung (Ann. d. Phys. 26. p. 120. 1908) deutet Hr. Paschen auf die relativ großen Unterschiede zwischen seinen Werten des Brechungsexponenten des Sylvins und den meinigen hin (Wied. Ann. 65. p. 612. 1898) und meint, der Grund dafür sei, „daß die von Rubens und seinen Schülern benutzten Prismen ungenügend plane Flächen hatten“.

Ich möchte bemerken, daß der größte Teil des Unterschiedes auf dem von mir mittels Spiegelspektrometer falsch gemessenen Wert der Normalablenkung der *D*-Linien beruht.

Für die Genauigkeit meiner Messungen im Ultraroten verweise ich auf folgende Tabelle.

Wellenlänge in $\mu$	Brechungsexponent		P.—T. 0,000
	nach Paschen	nach Trowbridge korrigiert	
0,982	1,480084	1,48027	—18(6)
1,179	1,478311	1,47806	+25(1)
1,768	1,475890	1,47602	—13(0)
2,357	1,474751	1,47482	—06(9)
4,714	1,471122	1,47115	—03(8)
5,304	1,470013	1,46998	+03(3)
5,893	1,468804	1,46886	—05(6)
8,84	1,460858	1,46069	+16(8)
11,197	1,45192	1,45228	—36

(Eingegangen 19. Juni 1908.)

**14. Berichtigung zur Abhandlung:  
„Über die elektromagnetischen Grundgleichungen  
für bewegte Körper“;  
von A. Einstein und J. Laub.**

In der genannten Abhandlung dieser Zeitschrift 26. p. 532. 1908 sind zwei Fehler unterlaufen:

p. 534 Formel (8) muß heißen:

statt: 
$$\varrho = \beta \left( \varrho' + \frac{v}{c} \mathfrak{s}_x' \right)$$

$$\varrho = \beta \left( \varrho' + \frac{v}{c} \mathfrak{s}_x' \right),$$

ferner die erste der Formeln (9):

$$\mathfrak{s}_x = \beta (\mathfrak{s}_x' + v \varrho')$$

statt:

$$\mathfrak{s}_x = \beta \left( \mathfrak{s}_x' + \frac{v}{c} \varrho' \right).$$

Die erste der Formeln (12 a) sowie die dritte der Formeln (13) müssen ebenfalls heißen:

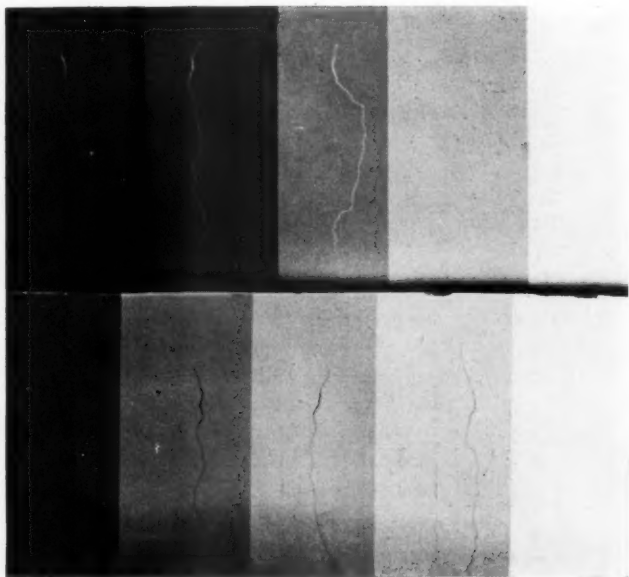
$$\beta (\mathfrak{s}_x - v \varrho) = \sigma \mathfrak{E}_x$$

und

$$\beta (\mathfrak{s}_y - |v| \varrho) = \sigma \left\{ \mathfrak{E} + \frac{1}{c} [v \mathfrak{B}] \right\}_y.$$

(Eingegangen 24. August 1908.)





Verschiedenes Verhalten der Lumière- und der Ilford-Platte beim  
Clayden-Effekt.



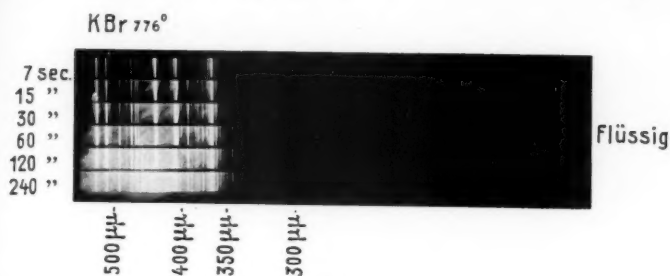


Fig. 1.

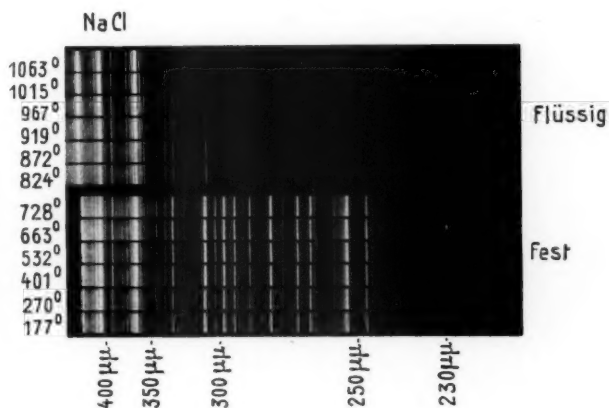


Fig. 2.

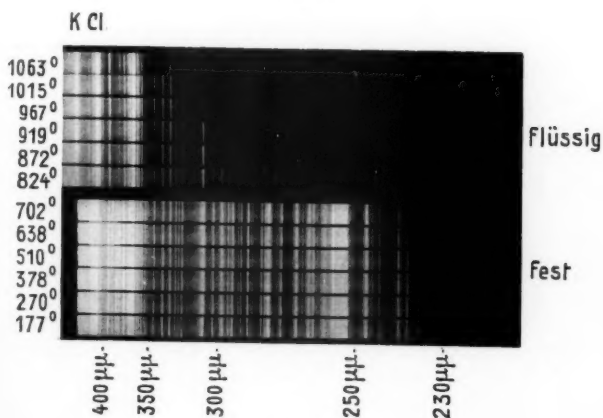


Fig. 3.



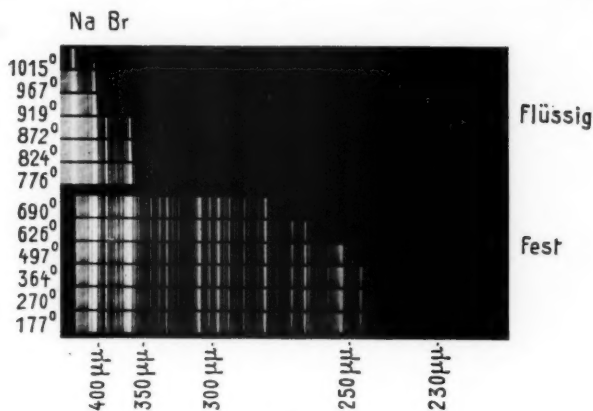


Fig. 4.

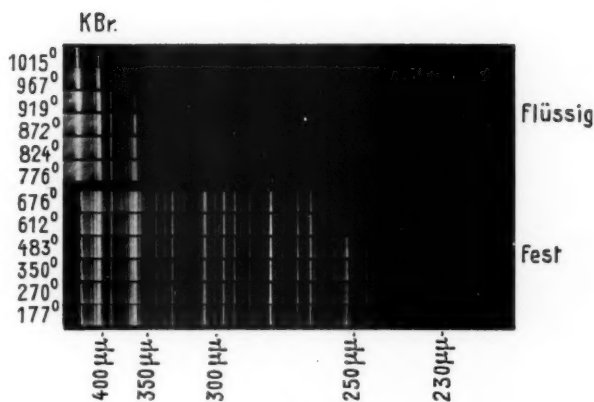


Fig. 5.

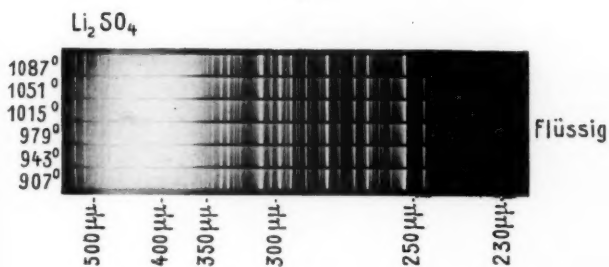


Fig. 6.



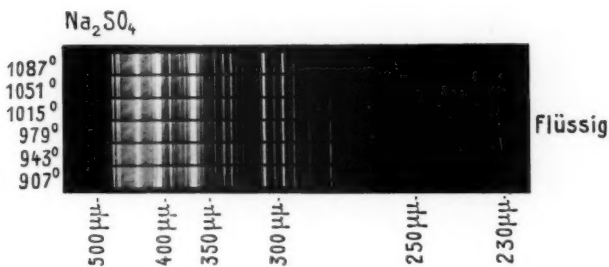


Fig. 7.

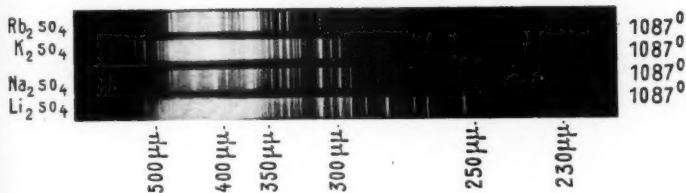


Fig. 8.

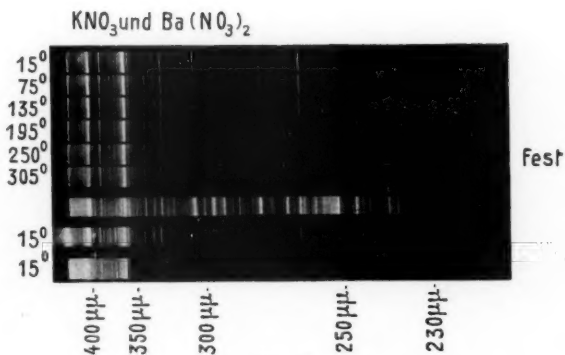
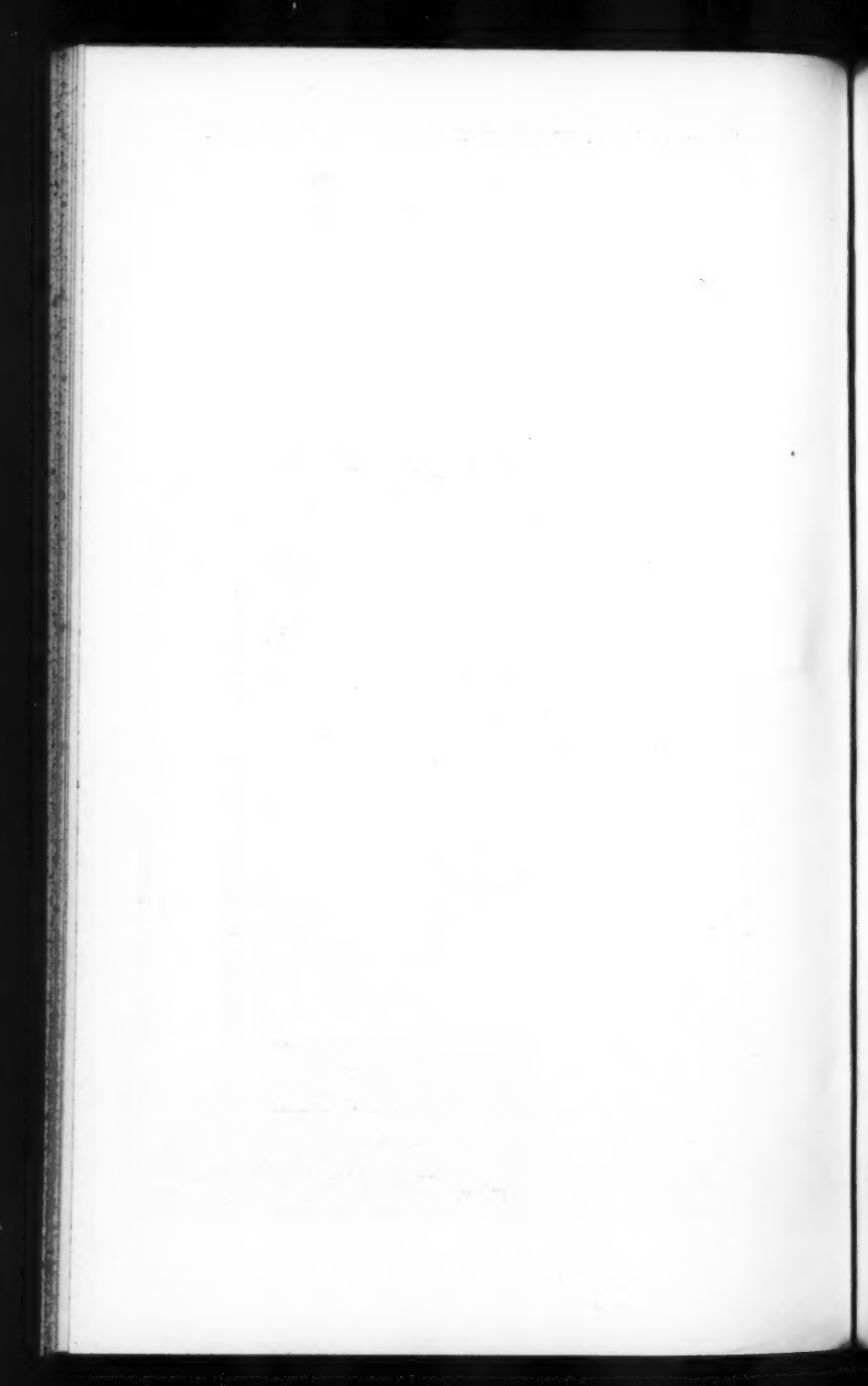
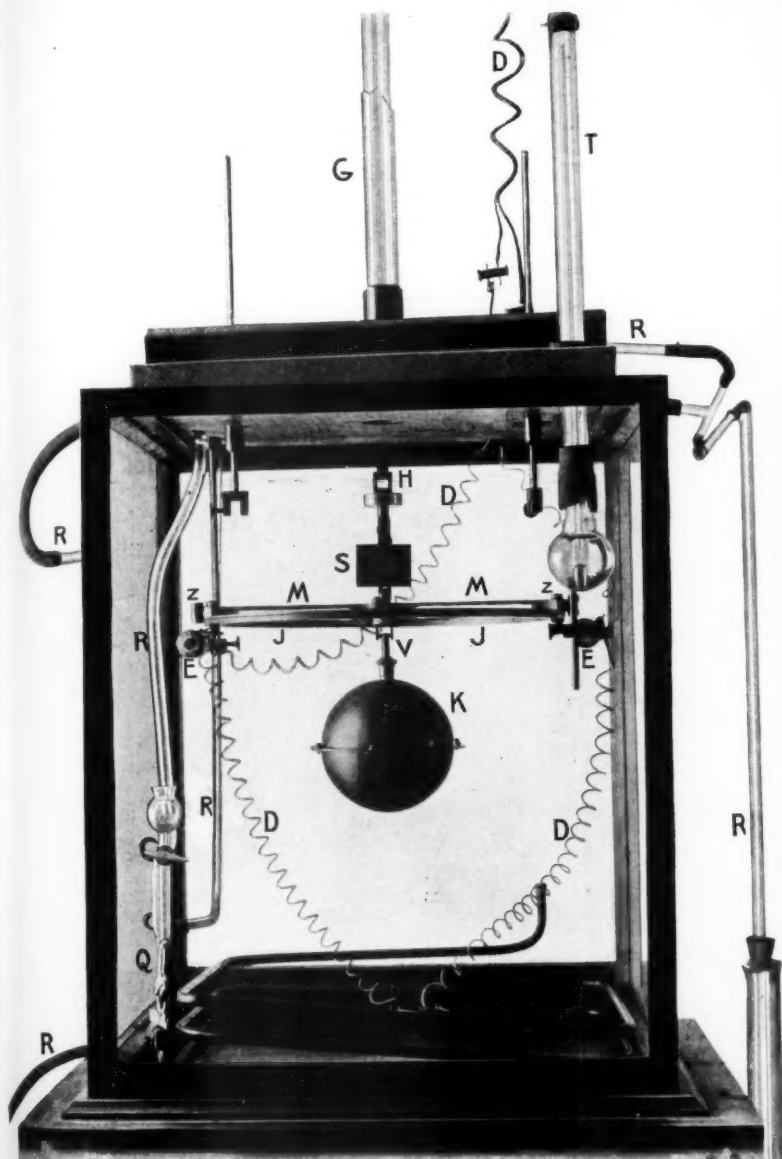


Fig. 9.







R. Ladenburg.



